

# Угловые и энергетические распределения нейтронов деления

Г. А. Бать, Л. И. Кудрин

На основе статистической модели ядра решается задача об угловых распределениях нейтронов деления с учетом анизотропии углового распределения осколков деления. Последнее аппроксимируется простейшим выражением вида  $1+k \cos^2 \alpha$ .

Предполагается, что нейтроны испускаются изотропно в системе координат покоя осколка.

Для  $U^{235}$  вычислены значения  $P$ —отношения интенсивностей нейтронов деления, вылетающих в направлении пучка первичных нейтронов и перпендикулярно к нему, — при разных значениях энергии первичных и вторичных нейтронов (в области от 1 до 10 Мэв). Среднее значение  $P$  в случае деления  $U^{235}$  нейтронами спектра деления найдено равным  $\sim 1,13$ . Получены также энергетические спектры нейтронов деления при разных значениях энергии первичных нейтронов. Метод расчета может быть использован для изучения анизотропии нейтронов, возникающих при делении других ядер.

При изучении деления тяжелых ядер быстрыми нейтронами обнаружено, что угловое распределение осколков не изотропно и что эта анизотропия осколков деления связана с энергией нейтронов, вызывающих деление [1], [2]. Поэтому можно ожидать, что нейтроны деления, вылетающие из движущихся осколков, также обладают угловой анизотропией относительно направления падающего нейтрона. Эта анизотропия может быть связана с энергией нейтронов, вызывающих деление.

## I

Закономерности испускания нейтронов из осколков можно описывать с помощью термодинамической (статистической) модели ядра, поскольку осколки являются, в основном, достаточно тяжелыми ядрами.

Согласно этой модели нейтроны деления летят изотропно по углам в системе координат покоя осколка и имеют в этой системе энергетический спектр

$$n(\varepsilon) \sim \varepsilon e^{-\varepsilon/T}, \quad (1)^*$$

\*) Предэкспоненциальный множитель в (1) имеет вид  $\varepsilon \sigma(\varepsilon)$ , где  $\sigma(\varepsilon)$ —сечение образования промежуточного ядра в обратном процессе. Для больших  $\varepsilon$   $\sigma(\varepsilon) \sim \text{const}$ , для малых  $\varepsilon$   $\sigma(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon^{1/2}$ .

где  $T$ —температура осколка после испускания нейтрона, связанная с энергией возбуждения соотношением

$$T = \sqrt{\frac{E_v}{\chi}}. \quad (2)$$

Значения постоянной  $\chi$  для различных ядер определены в ряде работ сопоставлением расчетов на основе термодинамической модели ядра с экспериментом [3]—[5].

Используя известные энергетические спектры нейтронов деления, можно определить энергию возбуждения  $E_v$ . Лучшее всего изучен спектр нейтронов деления ядра  $U^{235}$  тепловыми нейтронами.

Если подобрать такое значение  $T(0)$  (температуры осколка, образовавшегося при делении ядра тепловыми нейтронами), которое приводит к совпадению расчетного энергетического спектра нейтронов с экспериментальным, то соответствующая величина энергии возбуждения будет равна

$$E_v(0) = \chi T^2(0). \quad (3)$$

Для ядра с массой  $A \sim 120$  при  $\chi = 10 \text{ Мэв}^{-1}$  [2] оценка дает  $T(0) = 0,75 \text{ Мэв}$ ,  $E_v(0) = 5,6 \text{ Мэв}$ . Эти данные мы используем для расчета спектров нейтронов деления  $U^{235}$ , поскольку по статистической модели ядра  $U^{235}$

и  $U^{238}$  близки по своим свойствам. Такое определение энергии возбуждения, представляющееся нам наиболее правильным, может оказаться недостаточно точным. Оценим величину  $E'_B(0)$  из других соображений.

В работах Личмана и Фонга [2], [5] суммарная энергия возбуждения осколков  $E'_B(0)$  до испускания нейтронов оценивается в  $20 \text{ Мэв}$ . Эта величина может быть также грубо оценена из соотношения

$$E'_B(0) \sim \nu[E_{\text{св}} + 2T] + E_\gamma, \quad (4)$$

где  $E_{\text{св}}$  — энергия связи нейтрона в осколке;  $T$  — температура ядра после испускания нейтронов;  $E_\gamma \leq 2E_{\text{св}}$  — энергия  $\gamma$ -излучения.

Энергия связи  $E_{\text{св}}$  была вычислена Личманом [2] с помощью полуэмпирической формулы Вайтсекера:

$$E_{\text{св}} \sim 4 \div 5 \text{ Мэв}, \quad E_\gamma \sim 8 \text{ Мэв}, \quad \nu = 2,5; \\ 2T \sim 1 \text{ Мэв}.$$

При этом соотношение (4) дает  $E'_B(0) \sim 20 \text{ Мэв}$ , что хорошо согласуется с оценками, приведенными в работах [2], [5]. Суммарная энергия возбуждения осколков после испускания двух нейтронов

$$E_B(0) \sim (\nu - 2)(E_{\text{св}} + 2T) + E_\gamma \simeq 10 \div 11 \text{ Мэв}, \quad (5)$$

или для одного осколка  $5 \div 5,5 \text{ Мэв}$ .

Предположим далее, что:

1) кинетическая энергия налетающего нейтрона  $\epsilon_0$  целиком идет на дополнительное возбуждение осколков, а не на увеличение их кинетической энергии;

2) энергия возбуждения распределяется между осколками поровну независимо от отношения их масс.

Из различных соображений, в частности термодинамических, следует, что переход кинетической энергии налетающего нейтрона в энергию движения осколков крайне маловероятен, поскольку возбужденное ядро представляет собой систему с большим числом степеней свободы. По-видимому, на правильность первого предположения указывает также наблюдающееся на опыте увеличение среднего числа нейтронов на одно деление  $\bar{\nu}$  с ростом  $\epsilon_0$ .

Второе предположение менее обосновано. Однако:

а) опыты Фрезера [6] указывают на преимущественное испускание нейтронов из лег-

ких осколков, что говорит, по-видимому, о разном «нагреве» осколков;

б) Личман [2], исходя из этого предположения, получил хорошее совпадение с опытом расчетного соотношения вероятностей испускания одного, двух, трех и т. д. нейтронов возбужденными осколками.

Отметим, наконец, что результаты расчета, приведенные ниже, слабо зависят от того, как распределяется между осколками доля энергии возбуждения, обусловленная кинетической энергией налетающего нейтрона. Будем считать, что она также делится между осколками поровну.

При этих предположениях температура осколка для данной энергии налетающего нейтрона  $\epsilon_0$  определяется по формуле

$$T(\epsilon_0) = \sqrt{\frac{E'_B(0) + \epsilon_0/2}{\chi}}. \quad (6)$$

## II

Распределение осколков по углам не изотропно и может быть аппроксимировано выражением

$$X(\alpha) = 1 + k \cos^2 \alpha; \quad k = k(\epsilon_0), \quad (7)$$

где  $\epsilon_0$  — энергия налетающего нейтрона;  $\alpha$  — угол между направлением движения нейтрона, вызывающего деление, и направлением движения осколка \*). Значения коэффициента  $k$  могут быть получены из экспериментальной кривой, приведенной в работе [4].

Пусть ось  $z$  (рис. 1) совпадает с направлением движения нейтрона с энергией  $\epsilon_0$ , вызывающего деление ядра  $U^{238}$ , а углы  $\alpha$  и  $\theta$  определяют направление движения осколка и нейтрона соответственно.

Вероятность того, что нейтрон деления вылетит в элемент телесного угла вблизи  $\beta$ , с точностью до численного коэффициента, можно записать в виде

$$\Psi(\beta) \sim \int_{\beta=\text{const}} X(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha \cdot f(\theta) \sin \theta \, d\theta \, d\Phi. \quad (8)$$

Поскольку

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cos \varphi, \\ \cos \alpha &= \cos \beta \cdot \cos \theta + \sin \beta \cdot \sin \theta \cos \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

\*) Более точная аппроксимация имеет вид [7]:  $X(\alpha) = 1 + k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \cos^4 \alpha$ . Однако использование выражения (7) не вносит в наши результаты существенной ошибки.

якобиан

$$I = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \cos \beta} & \frac{\partial \cos \theta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \cos \beta} & \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{array} \right| = 1. \quad (10)$$

В связи с этим функция  $\Psi(\beta)$  принимает вид

$$\Psi(\beta) \sim \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} [X(\alpha) \sin \alpha f(\theta)] d\alpha, \quad (11)$$

где  $f(\theta)$  — угловое распределение нейтронов деления относительно фиксированного направления движения осколка.

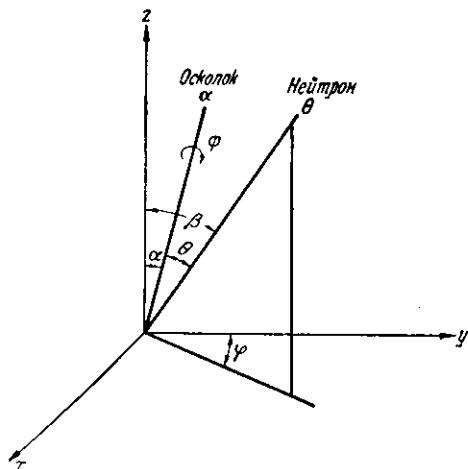


Рис. 1. Соотношение углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\Phi$ .

Из статистической модели ядра следует, что в системе координат покоя осколка угловое распределение нейтронов изотропно. Поэтому в лабораторной системе координат нейтроны, испускаемые осколком, имеют следующее распределение по углам [6]:

$$f(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( 2c \cos \theta \pm \frac{1 + c^2 \cos 2\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}} \right); \quad c \equiv \frac{v_0}{v'}, \quad (12)$$

где  $v_0$  — скорость осколка;  $v'$  — скорость нейтрона деления в системе координат покоя осколка. Знаки  $\pm$  физически обусловлены тем, что в случае  $c > 1$ , т. е. когда скорость осколка превышает скорость нейтронов в системе координат покоя осколка, данной энергии  $\epsilon$  соответствуют два значения энергии  $E$  в лабораторной системе координат, и эти нейтроны под данным углом могут иметь разную вероятность вылета.

Используя формулу (1), угловое и энергетическое распределение нейтронов деления, вылетающих из одного осколка при фиксированной температуре  $T$ , можно записать в виде

$$\Psi_{T,k}(\beta_1, E) \sim \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^{\pi} d\alpha \left\{ (1 + k \cos^2 \alpha) \sin \alpha \left[ \frac{2r}{\sqrt{\epsilon}} \mu \pm \frac{1 - \frac{r^2}{\epsilon} + 2 \frac{r^2}{\epsilon} \mu^2}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\epsilon} + \frac{r^2}{\epsilon} \mu^2}} \right] \frac{\epsilon}{T^2} e^{-\epsilon/T} \right\}, \quad (13)$$

где  $k = k(T)$ ,  $\mu = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi$  и  $r$  определяется из соотношения

$$\frac{v_0}{v'} = \frac{r}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (14)$$

При этом энергия нейтрона деления  $E$  в лабораторной системе координат связана с энергией нейтрона деления в системе координат покоя осколка  $\epsilon$  формулой

$$E = \epsilon \left[ 1 - \frac{r^2}{\epsilon} + 2 \frac{r^2}{\epsilon} \mu^2 - 2 \frac{r}{\sqrt{\epsilon}} \mu \sqrt{1 - \frac{r^2}{\epsilon} \mu^2} \right]. \quad (15)$$

Угловое распределение нейтронов деления складывается из угловых распределений нейтронов, летящих из первого и второго осколка:

$$\Psi = \Psi_1(r_1) + \Psi_2(r_2), \quad (16)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  характеризуют соответственно скорости первого и второго осколка. Индексы 1 и 2 у функций  $\Psi$  учитывают то, что для данной энергии налетающего нейтрона  $\epsilon_0$  температуры осколка, вообще говоря, различны, если их массы разные.

Выполнив интегрирование по  $\alpha$  в выражении (13) и проделав некоторые преобразования (см. приложение), можно показать, что функция

$$\Psi_1 \sim I_2 + k/2(I_2 - I_1) + k/2(3I_1 - I_2) \cos^2 \beta, \quad (17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi}{r_1^3 T_1^2} \int_{\sqrt{E-r}}^{\sqrt{E+r}} \frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{T_1}}}{y^2 + E - r_1^2} (y^2 - E - r_1^2) dy, \\ I_2 &= \frac{4\pi E}{r_1 T_1^2} \int_{\sqrt{E-r}}^{\sqrt{E+r}} \frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{T_1}}}{y^2 + E - r_1^2} dy. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Функция  $\Psi_2$  определяется формулами (17) и (18), если индексы 1 у параметров  $T$  и  $r$  заменить на индексы 2.

Выражение (17) можно записать в виде

$$\Psi_1 \sim C_1 + B_1 \cos^2 \beta \quad (19)$$

или через полиномы Лежандра

$$\Psi_1 \sim \xi P_0(\cos \beta) + \eta P_2(\cos \beta), \quad (19')$$

где

$$\xi = I_2 + k/18(7I_2 - 3I_1), \quad \eta = k/3(3I_1 - I_2).$$

Энергетический спектр нейтронов деления для фиксированных энергий нейтронов, вызывающих деление, получается интегрированием функций  $\Psi$  по телесному углу  $\Omega_\beta$

$$N_T(E) \sim \int_{\Omega_\beta} \Psi d\Omega_\beta = \int_{\Omega_\beta} (C + B \cos^2 \beta) d\Omega_\beta \sim C + B/3, \quad (20)$$

где  $C = C_1 + C_2$ ,  $B = B_1 + B_2$ .

Выражение (20) зависит от энергии нейтронов, вызывающих деление, через температуру осколков  $T$ .

### III

Температура осколка  $T$  связана с энергией падающего нейтрона  $\varepsilon_0$  соотношением (6). Значения температур для различных  $\varepsilon_0$ , подсчитанные для случая деления ядра на два равных осколка с массовым числом  $A$ , приведены в табл. 1.

Таблица 1

| $r_3=0,815$ | $\varepsilon_0, \text{ Мэв}$ | 0    | 2    | 4    | 6    | 10   |
|-------------|------------------------------|------|------|------|------|------|
| $A=120$     |                              |      |      |      |      |      |
| $x=10$      | $T, \text{ Мэв}$             | 0,75 | 0,80 | 0,85 | 0,93 | 1,06 |

Нужно отметить, что результаты расчета для  $\varepsilon_0 = 10 \text{ Мэв}$  могут оказаться менее достоверными, чем для меньших энергий, поскольку при  $\varepsilon_0 \sim 10 \text{ Мэв}$  возможно испускание нейтронов до деления ядра.

Интегралы  $I_1$  и  $I_2$  (см. формулу (18)) вычислены на электронной машине ЦЭМ-1 для указанных в табл. 1 значений температур и для трех значений величины  $r$ , характеризующей скорость осколка:  $r_1 = 0,684$ ,  $r_2 = 0,998$ ,  $r_3 = 0,815$ , причем  $r_1$  и  $r_2$  отно-

Таблица 2

| $E$<br>$\text{Мэв}$ | $T=0,75$ |        | $T=0,80$ |        | $T=0,85$ |        | $T=0,93$ |        | $T=1,06$ |        |                        |
|---------------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|------------------------|
|                     | $I_1$    | $I_2$  | $I_1$    | $I_2$  | $I_1$    | $I_2$  | $I_1$    | $I_2$  | $I_1$    | $I_2$  |                        |
| 1                   | 2,9240   | 6,627  | 2,676    | 6,211  | 2,462    | 5,835  | 2,172    | 5,302  | 1,845    | 4,613  | $A=141$<br>$r_1=0,684$ |
| 2                   | 2,340    | 4,604  | 2,226    | 4,509  | 2,119    | 4,407  | 1,960    | 4,237  | 1,731    | 3,863  |                        |
| 3                   | 1,447    | 2,593  | 1,444    | 2,664  | 1,433    | 2,716  | 1,402    | 2,770  | 1,296    | 2,650  |                        |
| 5                   | 0,3491   | 0,5575 | 0,3901   | 0,6399 | 0,4278   | 0,7199 | 0,4805   | 0,7549 | 0,4956   | 0,8980 |                        |
| 7                   | 0,0667   | 0,1000 | 0,0840   | 0,1290 | 0,1024   | 0,1609 | 0,1330   | 0,2168 | 0,1542   | 0,2595 |                        |
| 10                  | 0,0037   | 0,0053 | 0,0058   | 0,0085 | 0,0086   | 0,0126 | 0,0141   | 0,0215 | 0,0199   | 0,0311 |                        |
| 2                   | 3,655    | 6,112  | 3,390    | 5,821  | 3,153    | 5,552  | 2,823    | 5,165  | 2,426    | 4,592  | $A=98$<br>$r_2=0,998$  |
| 3                   | 2,633    | 4,068  | 2,523    | 3,998  | 2,415    | 3,920  | 2,251    | 3,792  | 1,997    | 3,480  |                        |
| 5                   | 0,9089   | 1,273  | 0,9504   | 1,360  | 0,9828   | 1,435  | 1,019    | 1,538  | 0,9850   | 1,632  |                        |
| 7                   | 0,2367   | 0,3147 | 0,2730   | 0,3698 | 0,3080   | 0,4248 | 0,3600   | 0,5110 | 0,3834   | 0,5589 |                        |
| 10                  | 0,0209   | 0,0264 | 0,0285   | 0,0368 | 0,0373   | 0,0487 | 0,0534   | 0,0717 | 0,0671   | 0,0921 |                        |
| 1                   | 3,619    | 7,387  | 3,293    | 6,885  | 3,009    | 6,438  | 2,633    | 5,813  | 2,222    | 5,036  | $A=120$<br>$r_3=0,815$ |
| 2                   | 2,843    | 5,165  | 2,658    | 4,993  | 2,500    | 4,825  | 2,275    | 4,569  | 1,982    | 4,118  |                        |
| 3                   | 1,819    | 3,152  | 1,851    | 3,173  | 1,806    | 3,179  | 1,727    | 3,163  | 1,565    | 2,971  |                        |
| 5                   | 0,5325   | 0,7960 | 0,5778   | 0,8854 | 0,6172   | 0,9684 | 0,6687   | 1,088  | 0,6699   | 1,127  |                        |
| 7                   | 0,1159   | 0,1635 | 0,1405   | 0,2025 | 0,1655   | 0,2436 | 0,2054   | 0,3118 | 0,2292   | 0,3593 |                        |
| 10                  | 0,0079   | 0,0107 | 0,0116   | 0,0159 | 0,0162   | 0,0225 | 0,0252   | 0,0358 | 0,0336   | 0,0422 |                        |

ся к случаю деления ядра  $U^{239}$  на осколки с массами  $A_1 = 141$  и  $A_2 = 98$ ,  $r_3$  — к случаю деления ядра на два почти равных осколка  $A_1 \simeq A_2 = 120$ .

Значения интегралов  $I_1$  и  $I_2$  приведены в табл. 2.

Как было указано в предыдущем параграфе, функция  $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ . Если сравнить величины

$$K = \left\{ \begin{array}{l} 2I_1 \\ 2I_2 \end{array} (r_3 = 0,815) \right\} \quad (21)$$

$$L = \left\{ \begin{array}{l} I_1(r_1) + I_1(r_2), \\ I_2(r_1) + I_2(r_2) \end{array} \right\}$$

для фиксированного значения температуры  $T$ , то, как это следует из табл. 2, наблюдается некоторое расхождение между ними. Однако температуры осколков в случае деления ядра на две неравные части отличаются от значений, приведенных в табл. 1. Если предположить, что энергия возбуждения распределена между осколками поровну, то температура тяжелого и легкого осколков может быть рассчитана по формуле (6). Вычисленные таким способом температуры осколков для нескольких значений энергии нейтронов, вызывающих деление, приведены в табл. 3.

Таблица 3

| $A=98$<br>$\chi=8$<br>$r_2=0,998$   | $\varepsilon_0, \text{ Мэв}$ | 0    | 2    | 4    | 6    | 10   |
|-------------------------------------|------------------------------|------|------|------|------|------|
|                                     | $T, \text{ Мэв}$             | 0,84 | 0,91 | 0,98 | 1,04 | 1,11 |
| $A=141$<br>$\chi=11$<br>$r_1=0,684$ | $T, \text{ Мэв}$             | 0,72 | 0,78 | 0,84 | 0,89 | 0,98 |

Если ввести поправки на температуры, приведенные в табл. 3, то оказывается, что  $\frac{K-L}{K} < 1\%$ .

Отсюда следует важный результат: угловые и энергетические распределения нейтронов деления слабо зависят от распределения осколков деления по массам. Поэтому оценку величины угловой анизотропии и энергетические спектры нейтронов деления можно получить, пользуясь результатами решения задачи для случая деления ядра на два равных осколка.

В связи с этим в выражении (19) индексы можно опустить и записать его в виде

$$\Psi \sim C + B \cos^2 \beta.$$

Определим величину угловой анизотропии нейтронов деления  $P$ :

$$P = \frac{\Psi(0^\circ)}{\Psi(90^\circ)} = \frac{C+B}{C}. \quad (22)$$

Расчетные значения анизотропии  $P(E, \varepsilon_0)$  для нескольких значений энергии нейтронов деления  $E$  и энергии падающего нейтрона  $\varepsilon_0$  приведены в табл. 4.

Таблица 4

| $E, \text{ Мэв} \backslash \varepsilon_0, \text{ Мэв}$ | 2    | 4    | 6    | 10   |
|--------------------------------------------------------|------|------|------|------|
| 1                                                      | 1,11 | 1,04 | 1,08 | 1,09 |
| 2                                                      | 1,16 | 1,05 | 1,11 | 1,13 |
| 3                                                      | 1,20 | 1,07 | 1,14 | 1,17 |
| 5                                                      | 1,25 | 1,09 | 1,19 | 1,24 |
| 7                                                      | 1,30 | 1,10 | 1,23 | 1,28 |
| 10                                                     | 1,35 | 1,13 | 1,25 | 1,33 |

Анизотропия монотонно возрастает с ростом энергии нейтронов деления и достигает значения 1,35 при  $E = 10 \text{ Мэв}$ .

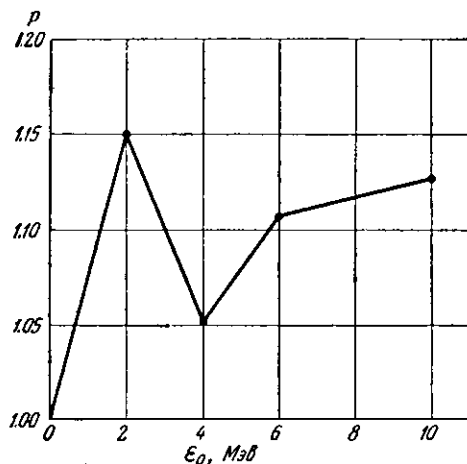


Рис. 2. Зависимость анизотропии  $P$ , усредненной по спектру нейтронов деления, от энергии налетающего нейтрона.

На рис. 2 приведена зависимость анизотропии нейтронов спектра деления, усредненной по области  $E > 1 \text{ Мэв}$ , от энергии  $\varepsilon_0$ .

Интересно оценить величину анизотропии  $P$ , усредненной по энергии нейтронов деления в том случае, когда деление ядра вызывается нейтронами спектра деления  $f(\varepsilon_0)$ .

где  $W(\varepsilon_0) = \frac{\sigma_f(\varepsilon_0)}{\sigma_\Sigma(\varepsilon_0)}$  — отношение сечения деления к полному нейтронному сечению для  $U^{238}$  [8].

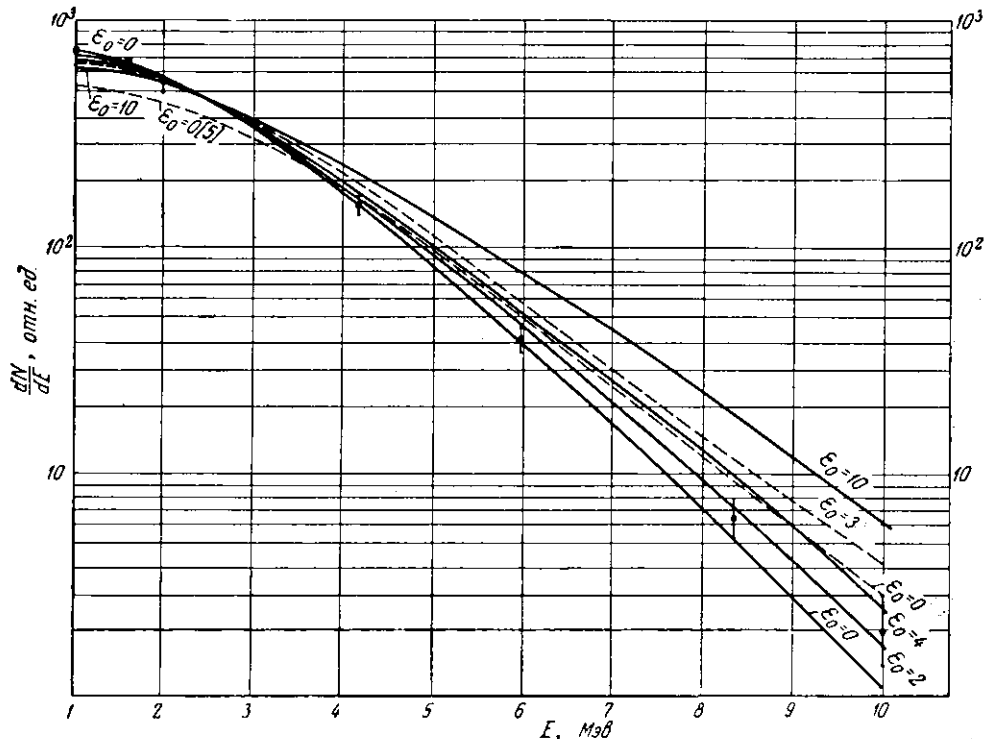


Рис. 3. Энергетические спектры нейтронов деления.

$\varepsilon_0$  — энергия нейтрона, вызывающего деление; — — — результаты расчета данной работы; — — — — расчеты Личмана; ● — экспериментальные данные для  $\varepsilon_0 = 0$  [9].

Угловое распределение нейтронов можно записать так:

$$\varphi(\beta) \sim \int_1^\infty \int_0^\infty \Psi[\beta, \varepsilon, k(\varepsilon_0), T(\varepsilon_0)] f(\varepsilon_0) d\varepsilon d\varepsilon_0. \quad (23)$$

Вычисления показывают, что  $\bar{P} = \frac{\varphi(0^\circ)}{\varphi(90^\circ)} = 1,13$ .

Подсчитанная таким образом величина  $\bar{P}$  не учитывает зависимости сечения деления ядра  $U^{238}$  от энергии падающего нейтрона. Угловое распределение нейтронов деления с учетом этой зависимости имеет вид

$$\varphi_1(\beta) \sim \int_1^\infty \int_0^\infty \Psi[\beta, \varepsilon, k(\varepsilon_0), T(\varepsilon_0)] f(\varepsilon_0) \times \\ \times W(\varepsilon_0) d\varepsilon d\varepsilon_0, \quad (24)$$

Функции  $W(\varepsilon_0)$  и  $f(\varepsilon_0)$  нормированы на единицу. Подсчет величины  $\bar{P}_1 = \frac{\varphi_1(0^\circ)}{\varphi_1(90^\circ)}$  дает значение 1,12.

На рис. 3 приведены энергетические распределения нейтронов деления, вычисленные при разных значениях энергии падающих нейтронов. Спектры нанесены в логарифмическом масштабе. Из рис. 3 видно, что энергетические спектры нейтронов деления чувствительны к энергии падающего нейтрона, но различие спектров для разных  $\varepsilon_0$  невелико.

На рис. 3 приведены также экспериментальные точки для деления на тепловых нейтронах ( $\varepsilon_0 = 0$ ) и результаты расчетов Личмана [2] для  $\varepsilon_0$ , равных 0 и 3 Мэв. Очевидно, что метод расчета и подбор параметров, предложенные в настоящей работе,

лучше соответствуют экспериментальным данным, полученным в [9], чем метод и параметры, использованные Личманом.

В проведенном выше расчете предполагается, что каждый осколок испускает по одному нейтрону. Однако уже при делении  $U^{235}$  тепловыми нейтронами среднее число нейтронов на одно деление  $\bar{\nu} \sim 2,5$ . Кроме того,  $\bar{\nu}$ , по-видимому, растет с увеличением  $\varepsilon_0$  [2].

Оценим очень грубо, как изменяются полученные выше выражения для энергетических распределений, если предположить, что один из осколков испускает один нейтрон, а другой — два (последовательно). Спектр «вторых» нейтронов должен быть мягче спектра «первых», поскольку после испускания первого нейтрона осколок теряет значительную часть своего возбуждения.

При малых возбуждениях осколка применимость статистической модели становится сомнительной. Для малых скоростей нейтрона  $v'$  в системе координат покоя осколка нейтронная ширина

$$\Gamma_n \sim v'. \quad (25)$$

Предположим, что для  $\varepsilon_2 < 1$  Мэв соотношение (25) справедливо. (Строго говоря, (25) справедливо только для  $\varepsilon_2 \leq 0,3$  Мэв.) Тогда вероятность испускания второго нейтрона с энергией  $\varepsilon_2$

$$W(\varepsilon_2) \sim \Gamma_n(\varepsilon_2) \sim \int_{v'=\text{const}} \sqrt{E_B - \varepsilon_1 - 2E_{св}} \times \\ \times F(E_B) f(\varepsilon_1) dE_B d\varepsilon_1, \quad (26)$$

где  $v' \sim \sqrt{\varepsilon_2} \sim \sqrt{E_B - \varepsilon_1 - 2E_{св}}$ ,  $E_B$  — энергия возбуждения осколка для данного значения  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  — кинетическая энергия первого нейтрона,  $E_{св}$  — средняя энергия связи нейтрона в осколке,  $F(E_B)$ ,  $f(\varepsilon_1)$  — функции распределения для  $E_B$  и  $\varepsilon_1$  соответственно. Функция  $F(E_B)$

вычислена в работе [2], а  $f(\varepsilon_1) \sim \varepsilon_1^{-\frac{\varepsilon_1}{T_1}}$ , где  $T_1$  — температура осколка после испускания первого нейтрона.

Выражение (26) для  $W(\varepsilon_2)$  «сшивается» с выражением  $W(\varepsilon_2) \sim \varepsilon_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{T_2}}$  при  $\varepsilon_2 = 0,8$  Мэв, поскольку для больших  $\varepsilon_2$  соотношение (25) не выполняется. Для  $\varepsilon_0 = 4$  Мэв ( $T = 0,85$  Мэв) вероятность  $W(\varepsilon_2)$  аппроксимируется выражением

$$W(\varepsilon_2) \sim \varepsilon_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{\theta}}, \quad (27)$$

где  $\theta$  — фиктивная температура, равная 0,8 Мэв.

Поскольку для  $\varepsilon_0 = 2$  Мэв в предыдущем решении температура  $T$  полагалась равной 0,80 Мэв, ясно, что часть энергетического спектра, обусловленная вторым нейтроном, в лабораторной системе координат совпадает с энергетическим спектром для  $\varepsilon_0 = 2$  Мэв, приведенным на рис. 3.

При этом суммарный спектр, обусловленный всеми тремя нейтронами, для  $\varepsilon_0 = 4$  Мэв отличается от приведенного на рис. 3 не более чем на 7%. Отметим еще раз грубость проведенной оценки влияния последовательного испускания нейтронов на энергетический спектр нейтронов деления. В работе [10] показано, что спектры нейтронов деления  $U^{235}$  и  $Pu^{239}$  под действием тепловых нейтронов совпадают в пределах экспериментальных ошибок. Поскольку  $\bar{\nu}$  для  $U^{235}$  и  $Pu^{239}$  различаются заметно, это совпадение также, по-видимому, говорит о слабом влиянии последовательного испускания нейтронов на энергетический спектр.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить В. К. Саульева за составление программы для электронной машины.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Вычисление $\Psi_{T,k}(\beta, E)$

Общее выражение для  $\Psi$  дается соотношением (13).

Энергия нейтрона в системе координат осколка  $\varepsilon$  связана с энергией нейтрона деления в лабораторной системе координат  $E$  выражением

$$\varepsilon = E - 2r\sqrt{E}\mu + r^2. \quad (28)$$

Если сделать замену переменных  $y = \sqrt{\varepsilon}$ , то функция  $\Psi$  запишется в виде

$$\Psi \sim \frac{8E^{3/2}}{T^2} \int_0^\pi d\alpha (1 + k \cos^2 \alpha) \sin \alpha \times \\ \times \frac{\int_{\sqrt{E+r^2-2r\sqrt{E}\cos(\alpha+\beta)}}^{\sqrt{E+r^2-2r\sqrt{E}\cos(\alpha-\beta)}} \frac{f(y) dy}{\sqrt{4Er^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - (y^2 - E - r^2 + 2r\sqrt{E}\cos \alpha \cdot \cos \beta)^2}}, \quad (29)$$

где  $f(y) = \frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{T}}}{E + y^2 - r^2}$ .

При  $c < 1$  в выражении (12) необходимо брать знак плюс. Это условие соответствует области энергий нейтронов деления  $E > 4r^2$ . Можно показать, что при  $E > r^2$  и  $c > 1$  в выражении (12) также

нужно брать знак плюс. Дальнейшее вычисление функции  $\Psi$  проведено только для энергий  $E > r^2$ , так как область  $E < 1 \text{ Мэв}$  в данной работе не исследовалась.

Функция  $\Psi$  может быть записана в виде

$$\Psi = \Psi_I + \Psi_{II} + \Psi_{III}, \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi_I &\sim \frac{8E^{3/2}}{T^2} \int_{\sqrt{E-r}}^{\sqrt{E+r-2r\sqrt{E}\cos\beta}} f(y) dy \times \left. \begin{aligned} &\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) + \beta \\ &\int_{-\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) + \beta}^{\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) + \beta} f_1(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \right\} \\ \Psi_{II} &\sim \frac{8E^{3/2}}{T^2} \int_{\sqrt{E+r-2r\sqrt{E}\cos\beta}}^{\sqrt{E+r+2r\sqrt{E}\cos\beta}} f(y) dy \times \left. \begin{aligned} &\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) + \beta \\ &\int_{\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) - \beta}^{\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) + \beta} f_1(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \right\} \\ \Psi_{III} &\sim \frac{8E^{3/2}}{T^2} \int_{\sqrt{E+r+2r\sqrt{E}\cos\beta}}^{\sqrt{E+r}} f(y) dy \times \left. \begin{aligned} &-\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) - \beta \\ &\int_{\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) - \beta}^{-\arccos\left(-\frac{y^2-E-r^2}{2r\sqrt{E}}\right) - \beta} f_1(\alpha) d\alpha; \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$f_1(\alpha) = \frac{(1 + k \cos^2 \alpha) \sin \alpha}{[4Er^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta - (y^2 - E - r^2 + 2r\sqrt{E}\cos\alpha \cdot \cos\beta)^2]^{1/2}}. \quad (32)$$

Интегрирование соотношений (31) приводит к следующему выражению для  $\Psi$ :

$$\Psi \sim \frac{\pi}{2r^3 T^2} \int_{\sqrt{E-r}}^{\sqrt{E+r}} \frac{2k(y^2 - E - r^2) + k \sin^2 \beta [4r^2 E - 3(y^2 - E - r^2) + 8r^2 E]}{y^2 + E - r^2} dy, \quad (33)$$

которое легко сводится к интегралам (18). Вычисление функции  $\Psi$  для области энергий  $E < r^2$  не представляет большого труда.

Однако целью работы является получение характеристик части спектра нейтронов, способных

вызвать дальнейшее деление ядер  $U^{238}$ , поэтому область малых энергий  $E$  не рассматривалась.

Поступила в редакцию 8 XII 1956 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. B. Leachman, Determination of fission quantities of importance to reactors (Доклад № 592, представленный США на Международную конференцию по мирному использованию атомной энергии, 1955).
2. R. B. Leachman, Phys. Rev. **101**, 1005 (1956).
3. Д. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика. ИЛ, 1954, стр. 293.
4. J. Chernick, The theory of uranium-water lattices (Доклад № 603, представленный США на Международную конференцию по мирному использованию атомной энергии, 1955).
5. P. Fong, Phys. Rev. **102**, 434 (1956).
6. J. S. Fraser, Phys. Rev. **83**, 17 (1951).
7. J. E. Brolley, Jr.; W. C. Dickinson, R. L. Henkel, Phys. Rev. **99**, 159 (1955).
8. D. J. Hughes, J. A. Harvey, Neutron Cross Sections. USAEC Commission, McGraw-Hill Book Company Inc. N.-Y., Toronto, London, 1955.
9. L. Cranberg, G. Frye, N. Nereson, L. Rosen, Phys. Rev. **103**, 662 (1956).
10. N. Nereson, Phys. Rev. **88**, 823 (1952).