

3. Reactor Shielding Design Manual, ed. by Rockwell, N. Y., 1956.
4. J. T a y l o r. Application of γ -rays Build up Data to Shield Design, WARD RM-217, 1954.
5. H. G o l d s t e i n, J. W i l k i n s. Calculation

- of the penetration of γ -rays, Final Report, AEC, USA, 1954.
6. L. K i n g. Phil. Mag. (6), 23, 242 (1912).
7. Н. Г. Гусев. Справочник по радиоактивным излучениям и защите. Медгиз, 1956.

Численный метод решения двумерных уравнений диффузии

Н. И. Булеев

Исследование широкого круга стационарных процессов диффузии приводит к решению дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{1}{r^a} \frac{\partial}{\partial r} r^a A \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} A \frac{\partial \varphi}{\partial y} - C\varphi = -F \quad (1)$$

с линейными краевыми условиями на контуре

$$m_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} + m_2 \varphi = U \quad (2)$$

и условиями на границе раздела различных сред

$$[\varphi] = 0, \quad (3)$$

$$\left[A \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] = 0. \quad (4)$$

Здесь r, y — независимые переменные; A, C, F, U — некоторые кусочно-непрерывные функции переменных r, y (причем A и C везде положительны); показатель степени a равен нулю или единице; символ $[\]$ означает разность значений функции на обеих сторонах поверхности раздела; n — нормаль к поверхности раздела различных сред.

Наиболее распространенным методом решения задачи является метод итераций. Уравнения (1)–(4) в конечных разностях записываются в виде

$$P_{ik} \varphi_{ik} = a_{ik} \varphi_{i-1, k} + c_{ik} \varphi_{i+1, k} + b_{ik} \varphi_{i, k-1} + d_{ik} \varphi_{i, k+1} + f_{ik} \quad (5)$$

и n -е приближение для функции φ_{ik} вычисляется по $(n-1)$ -му приближению для функции φ в окрестности точки (i, k) (см., например, [1]). Однако итерации, описываемые формулой (5), во многих случаях сходятся весьма медленно.

Для решения двумерных разностных уравнений эллиптического типа М. В. Келдыш, И. М. Гельфанд и О. В. Локуцкий разработали метод матричной факторизации. Разностное уравнение типа (5) представляется в разностно-матричной форме, и затем решается по схеме разностной факторизации для одномерного уравнения диффузии [2]. Применительно к уравнению (5) метод матричной факторизации оказывается эффективным в том случае, если для одной из независимых переменных число узловых точек невелико.

таким методом факторизации и последовательных приближений.

Заменой переменных в уравнениях (1)–(4) конечными разностями решение их можно свести к решению системы разностных уравнений вида

$$-a_{ik} \varphi_{i-1, k} - c_{ik} \varphi_{i+1, k} - b_{ik} \varphi_{i, k-1} - d_{ik} \varphi_{i, k+1} + P_{ik} \varphi_{ik} = f_{ik}, \quad (6)$$

причем коэффициенты этих уравнений удовлетворяют условиям

$$a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik} \leq P_{ik}.$$

Для простоты изложения будем считать, что рассматриваемая область в выбранной системе координат является прямоугольной, т. е. индексы i, k в системе (6) принимают значения:

$$i = 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, N_k.$$

Так как система (6) записана с учетом граничных условий (2), будем полагать, что

$$a_{1k} = c_{Mk} = b_{i1} = d_{iN} = 0. \quad (7)$$

Решение уравнений (6) сведем к решению системы разностных уравнений первого порядка. Для этого прибавим к правой и левой частям уравнения (6) выражение

$$\psi_{ik} = r_{ik} \varphi_{i-1, k+1} + s_{ik} \varphi_{i+1, k-1} - \theta_{ik} (r_{ik} + s_{ik}) \varphi_{ik}, \quad (8)$$

где коэффициенты r_{ik} и s_{ik} являются пока произвольными, а значения параметра θ_{ik} зафиксированы, причем $0 \leq \theta_{ik} \leq 1$.

Полученное уравнение заменим эквивалентной системой вида

$$\left. \begin{aligned} z_{ik} &= a_{ik} z_{i-1, k} + \beta_{ik} z_{i, k-1} + \gamma_{ik} (f_{ik} + \psi_{ik}), \\ \varphi_{ik} &= \xi_{ik} \varphi_{i+1, k} + \delta_{ik} \varphi_{i, k+1} + z_{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Чтобы система (9) была эквивалентна уравнению (6), коэффициенты $a_{ik}, \beta_{ik}, \xi_{ik}, \delta_{ik}, r_{ik}, s_{ik}$ должны быть равны

$$\left. \begin{aligned} a_{ik} &= a_{ik} \gamma_{ik}; \quad \beta_{ik} = b_{ik}; \quad \gamma_{ik}; \quad \xi_{ik} = c_{ik} \gamma_{ik}; \\ \delta_{ik} &= d_{ik} \gamma_{ik}; \\ r_{ik} \gamma_{ik} &= a_{ik} \delta_{i-1, k}; \quad s_{ik} \gamma_{ik} = \beta_{ik} \delta_{i, k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

а коэффициенты γ_{ik} определяются по рекуррентной формуле

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{P_{ik} - a_{ik} (c_{i-1, k} + \theta_{i, k} d_{i-1, k}) \gamma_{i-1, k} - b_{ik} (d_{i, k-1} + \theta_{ik} c_{ik}) \gamma_{i, k-1}}. \quad (11)$$

В настоящей статье кратко излагается релаксационный метод решения задачи, являющейся соче-

Систему уравнений (9) будем решать методом последовательных приближений. Чтобы получить

первое приближение для φ_{ik} , задаем величины φ_{ik} , входящие в правую часть уравнения для z_{ik} ; при получении второго приближения для φ_{ik} величины ψ_{ik} вычисляются по первому приближению и т. д. Относительная роль слагаемого ψ_{ik} в уравнениях (9) и сходимость последовательных приближений будут определяться выбором параметра θ_{ik} .

Если сумма коэффициентов a_{ik} , b_{ik} , c_{ik} , d_{ik} мало отличается от P_{ik} , то можно показать, что итерационный процесс (9) сходится лишь при значениях θ_{ik} , близких к нулю. При этом одна итерация по системе (9) равносильна 5—6 обычным итерациям по формуле (5). Сходимость итерационного процесса (9) при $\theta_{ik}=0$ была доказана С. М. Ермаковым.

Если в уравнениях (11) и (9) положить $\theta_{ik} \approx 0,5$ и к уравнениям (9) добавить формулу обычной итерации (5), то полученный итерационный процесс

$$\left. \begin{aligned} z_{ik} &= a_{ik}z_{i-1, k} + \beta_{ik}z_{i, k-1} + \gamma_{ik}(f_{ik} + \psi_{ik}); \\ v_{ik} &= \xi_{ik}v_{i-1, k} + \delta_{ik}v_{i, k+1} + z_{ik}; \\ \varphi_{ik} &= \frac{1}{P_{ik}\gamma_{ik}}(a_{ik}v_{i-1, k} + \beta_{ik}v_{i, k-1} + \\ &+ \xi_{ik}v_{i+1, k} + \delta_{ik}v_{i, k+1} + \gamma_{ik}f_{ik}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

окажется весьма эффективным. Практика решения задач показывает, что в этом случае одна итерация равносильна 10—12 итерациям (5).

Достаточным условием сходимости итерационного процесса (12) является выполнение неравенства

$$|z_{ik}^{(n)}| \leq \frac{1}{P_{ik}\gamma_{ik}}(P_{ik} + Q_{ik}) < 1, \quad (13)$$

где функции P_{ik} и Q_{ik} вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\left. \begin{aligned} Q_{ik} &= \xi_{ik}(Q + A)_{i+1, k} + \delta_{ik}(Q + A)_{i, k+1} + \Sigma'_{ik}, \\ P_{ik} &= a_{ik}Q_{i-1, k} + \beta_{ik}Q_{i, k-1} + A_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

причем

$$A_{ik} = a_{ik}A_{i-1, k} + \beta_{ik}A_{i, k-1} + \Sigma'_{ik}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma'_{ik} &= a_{ik}\mu_{i-1, k} + \beta_{ik}v_{i, k-1} + |\beta_{ik}\mu_{i, k-1} - \\ &- a_{ik}\theta_{i-1, k}(\mu + v)_{i-1, k}| + \\ &+ |a_{ik}v_{i-1, k} - \beta_{ik}\theta_{i, k-1}(\mu + v)_{i, k-1}|, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{ik} &= \xi_{ik}v_{i+1, k} + \delta_{ik}\mu_{i, k+1} + \\ &+ |\delta_{ik}v_{i, k+1} - \xi_{ik}\theta_{i+1, k}(\mu + v)_{i+1, k}| + \\ &+ |\xi_{ik}\mu_{i+1, k} - \delta_{ik}\theta_{i, k+1}(\mu + v)_{i, k+1}|, \end{aligned} \quad (17)$$

а

$$\mu_{ik} = a_{ik}\delta_{i-1, k}, \quad v_{ik} = \beta_{ik}\xi_{i, k-1}.$$

В качестве примера применения схемы (12) приведем результаты решения задачи, типичной для расчета пространственного распределения плотности тепловых нейтронов в реакторе (поглощение нейтронов мало):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2(2 - x^2 - y^2), \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= 0 \quad \text{при } x=0 \text{ или } y=0, \\ \varphi &= 0 \quad \text{при } x=1 \text{ или } y=1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(Точное решение задачи есть $\varphi = (1-x^2)(1-y^2)$).

Было принято, что шаг координатной сетки по осям x и y $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{7}$, поэтому численное решение для φ находилось в 49 точках области. В точках по осям x и y значения θ_{ik} были приняты равными нулю, а в остальных точках—0,5. При указанных значениях параметра θ_{ik} и выбранном числе

счетных узлов коэффициент сходимости последовательных приближений $\lambda_1 = 0,75$. При решении тех же 49 разностных уравнений методом обычных итераций (5) коэффициент сходимости $\lambda_1 = 0,975$. Так как $0,75 \approx (0,975)^{11}$, в данном случае одна итерация по формулам (12) равносильна 11 итерациям по формуле (5).

x	0	0,1429	0,2857	0,4286	0,5714	0,7142	0,8571	1,00
$(1-x^2)(1-y^2)$	1,000	0,9796	0,9184	0,8163	0,6735	0,4899	0,2654	0
1-е приближение	0,2131	0,2168	0,2010	0,1812	0,1554	0,1190	0,0697	0
2-е приближение	0,3916	0,3905	0,3664	0,3309	0,2810	0,2115	0,1196	0
3-е приближение	0,5335	0,5284	0,4964	0,4464	0,3756	0,2796	0,1556	0
6-е приближение	0,7936	0,7802	0,7322	0,6536	0,5428	0,3979	0,2175	0
1-е приближение по формуле (5)	0,0204	0,0202	0,0196	0,0186	0,0171	0,0152	0,0129	0

В таблице приведены значения нескольких приближений для искомой функции φ в узлах по оси x . Для сопоставления приведено первое приближение, полученное по формуле (5).

В сочетании с приемами экстраполяции решение уравнений типа (18)—(19) с помощью схемы (12) может быть получено с достаточной точностью примерно 10—15 итерациями.

Если в исходной системе уравнений (1)—(4) краевые условия имеют вид $m_1\varphi = U$, то для решения задачи можно применить более экономную схему разностной факторизации, в которой попеременно используются две системы вида (9). Такая схема была исследована автором ранее и опубликована в работе [3].

Изложенный метод решения двумерных уравнений диффузии может быть обобщен и применен для уравнений диффузии в пространстве.

Поступило в Редакцию 18/X 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Фаддеев а. Вычислительные методы линейной алгебры. Гостехиздат, 1948.
2. О. В. Локуцкий й. Усп. матем. наук, XI, вып. 3, 224 (1956).
3. Г. И. Марчук. Приложение № 3—4 к журналу «Атомная энергия». Атомииздат, 1958, гл. IX.

