



К нелинейной теории медленных волн в плазме¹

Я. Б. Файнберг

В нелинейном приближении рассматривается распространение электромагнитных волн в узком плазменном волноводе. Определена зависимость фазовой скорости от амплитуды. Исследуется вопрос об умножении частоты. Найдена амплитуда второй гармоники. Благодаря нелинейным эффектам возникает новая возможность изменения фазовой скорости волны с помощью изменения амплитуды, обеспечения радиальной и фазовой устойчивости в ускорителях, а также некоторой модификации методов усиления и генерирования микрорадиоволн.

Как известно, диэлектрическая постоянная плазмы $\epsilon = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}$, поэтому фазовая скорость распространяющихся в безграничной плазме волн V_ϕ больше скорости света в вакууме c . Через плазму могут распространяться только волны, частота которых $\omega > \Omega$, так как для $\omega < \Omega$ диэлектрическая постоянная плазмы ϵ отрицательна.

Совершенно иными дисперсионными свойствами обладает ограниченная плазма [1—3]. В плазменном волноводе, ограниченном, например, по радиусу (плазменный стержень или канал в плазме) могут распространяться волны с частотой $0 < \omega < \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$, причем фазовая скорость распространения волн V_ϕ может быть меньше c . Дисперсионные зависимости и топография поля плазменных волноводов определены из линейной теории распространения волн в таких волноводах. Однако с ростом напряженности поля и увеличением длины волны, распространяющейся в плазме, линейное приближение становится неприменимым. Поэтому возникает вопрос о рассмотрении нелинейной задачи распространения микрорадиоволн в плазменных волноводах. Нелинейная теория в одномерном случае изучалась в работах [4, 5]. В настоящей статье будет рассмотрен частный двумерный случай.

Так как основной интерес представляют большие электромагнитные поля, будем исходить из гидродинамического приближения, т. е. не будем учитывать температуры плазмы ($T=0$) и функции распределения. Волноводные свойства плазмы проявляются уже при малых плотностях, поэтому столкновениями в плазме можно пренебречь.

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в плазменном стержне для случая, когда распространение волн не сопровождается возникновением переменной составляющей плотности ($\rho_- = 0$). Тогда система уравнений, описывающая распространение волн в плазме, имеет вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho \vec{V}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{e}{m} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (2)$$

где $\vec{V}$ — скорость электронов плазмы. Предполагается, что ионы неподвижны. Так как $\rho_- = 0$, то положим, что $\varphi = 0$. Тогда из условия Лоренца следует

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (3)$$

Уравнение непрерывности в этом случае имеет вид

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (4)$$

Будем искать решения для всех величин системы уравнений (1—4) в виде

¹ Доложено Ученому совету ФТИ. АН УССР в 1956 г.

$R(r)f(z-Vt)$, где z — направление распространения волны, V — ее фазовая скорость.

Воспользовавшись уравнением (1), получим для компонента A_z уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho_0 V_z, \quad (5)$$

где ρ_0 — равновесная плотность электронов.

Введем безразмерные величины:

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\frac{mc}{e} V}, \quad r_0 = r \frac{\Omega}{V}, \quad z_0 = z \frac{\Omega}{V},$$

$$\tau = \Omega t, \quad V_{0z} = \frac{V_z}{V},$$

где $\Omega^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}$ — ленгмюровская частота колебаний электронов плазмы. Перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(r_0 \frac{\partial A_{0z}}{\partial r_0} \right) + \frac{\partial^2 A_{0z}}{\partial z_0^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 A_{0z}}{\partial \tau^2} = -\beta^2 V_{0z}, \quad (6)$$

$$\beta = \frac{V}{c}.$$

Воспользовавшись уравнениями (2) и (4), получим

$$\frac{\partial V_{0z}}{\partial \tau} - \frac{r_0}{2} \frac{\partial V_{0z}}{\partial z_0} \frac{\partial V_{0z}}{\partial r_0} + V_{0z} \frac{\partial V_{0z}}{\partial z_0} = -\frac{\partial A_{0z}}{\partial \tau}.$$

Переходя от размерной переменной $\eta = z - Vt = \frac{V}{\Omega}(z_0 - \tau)$ к безразмерной $\eta_0 = z_0 - \tau = \frac{\tau_0}{V}$, будем искать все величины как функции $R(r_0)f(\eta_0)$. Запишем уравнения (5), (6) в виде

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} \right) f(\eta_0) + R(r_0)(1 - \beta^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta_0^2} =$$

$$= -\beta^2 V_{0z}(r_0) V_{0z}(\eta_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial V_{0z}}{\partial \eta_0} \left[V_{0z} - 1 - \frac{r_0}{2} \frac{\partial V_{0z}}{\partial r_0} \right] = \frac{\partial A_{0z}}{\partial \eta_0}. \quad (8)$$

Решение системы уравнений (7), (8) в общем виде является очень трудной математической задачей. В дальнейшем будем рассматривать тонкие плазменные стержневые волноводы, т. е. будем предполагать, что $r_0^2 \ll 1$.

Хотя такое предположение ограничивает область применения полученных решений, однако оно позволяет выяснить основной вопрос о различии распространения электромагнитных волн в ограниченной и безграничной плазме. В этом смысле предположение о малости r_0 является наиболее целе-

сообразным, так как при этом свойства ограниченной плазмы должны сказываться наиболее полно.

Так как радиус плазменного стержня предполагается малым, то в разложении в ряд функций $R(r_0)$ и $V_{0z}(r_0)$ можно ограничиться первыми членами

$$R(r_0) = R(0) + R'(0)r_0 + \frac{R''(0)r_0^2}{2},$$

$$V_{0z}(r_0) = V_{0z}(0) + V'_{0z}(0)r_0 + \frac{V''_{0z}(0)r_0^2}{2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} \right) = \frac{1}{r_0} R'(0) + 2R''(0).$$

При $r_0 = 0$ величина V_{0z} конечна, поэтому из уравнения (7) следует, что $R'(0) = 0$. Согласно уравнению (7) зависимость $V_{0z}(r_0)$ имеет тот же вид, что и $R(r_0)$, так как $\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} \right) = 2R''(0) = \text{const.}$ Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} R(r_0) &= R(0) + \frac{R''(0)r_0^2}{2}, \\ V_{0z}(r_0) &= V_{0z}(0) + \frac{V''_{0z}(0)r_0^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сохраняя в уравнении (7) члены нулевого порядка по r_0 , получим

$$2R''(0)f(\eta_0) + R(0) \frac{d^2 f}{d\eta_0^2} (1 - \beta^2) =$$

$$= -\beta^2 V_{0z}(0) V_{0z}(\eta_0),$$

или

$$\frac{d^2 f}{d\eta_0^2} (1 - \beta^2) + k_1^2 f = -\beta^2 V'_{0z}(0) V_{0z}(\eta_0), \quad (10)$$

где

$$k_1^2 = \frac{2R''(0)}{R(0)}.$$

Если, в частности, $R(r_0) \approx J_0(r_0)$, т. е. зависимость от r_0 такая же, как и в линейном приближении, то, учитывая, что

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial r_0} \left(r_0 \frac{\partial R}{\partial r_0} \right) = k_1^2 R,$$

получим

$$\left[\frac{d^2 f}{d\eta_0^2} (1 - \beta^2) + k_1^2 f \right] \alpha J_0(r_0) =$$

$$= -\beta^2 V_{0z}(r_0) V_{0z}(\eta_0). \quad (11)$$

Отсюда следует, что $V_{0z}(r_0) \approx J_0(r_0)$. Вос-

пользовавшись выражением (8) и (9), получим

$$\begin{aligned} V_{0z} - 1 - \frac{r_0}{2} \frac{\partial V_{0z}}{\partial r_0} &= V_{0z}(0) - 1 + 0(r_0^2), \\ V_{0z}(0) \frac{dV_{0z}(\eta_0)}{d\eta_0} [V_{0z}(\eta_0) V_{0z}(0) - 1] + \\ &+ 0(r_0^2) = \frac{df}{d\eta_0} R(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, для тонких пучков уравнение движения с точностью до членов $0(r_0^2)$ имеет такой же вид, как и для одномерного движения.

Интегрируя уравнение (12), получим

$$V_{0z}(\eta_0) = 1 - \sqrt{C_1 + 2fR'(0)}. \quad (13)$$

Используя выражения (10) и (13), получим уравнение для определения функции f :

$$\frac{d^2 f}{d\eta_0^2} (1 - \beta^2) + k_1^2 f = -\beta^2 [1 - \sqrt{C_1 + af}]. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) в общем виде может быть получено с помощью эллиптических интегралов.

Рассмотрим сначала медленные волны ($\varepsilon = \frac{V^2}{c^2} \ll 1$). Тогда уравнение (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + k_1^2 f &= -\varepsilon [k_1^2 f + (1 - \sqrt{C_1 + 2f})] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[\frac{k_1^2 f}{2} - (1 - \sqrt{C_1 + 2f}) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Для решения уравнения (15) воспользуемся методом решения нелинейных уравнений с малой нелинейностью, разработанным Н. Н. Боголюбовым. Ищем решение в виде

$$f = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots, \quad (16)$$

где u_i — периодические функции с периодом 2π , а величины a и ψ определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\eta} &= \varepsilon_1 A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a), \\ \frac{d\psi}{d\eta} &= k_1 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для однозначности определения u_i , A_i и B_i подчиним функции u_i условиям:

$$\int_0^{2\pi} u_i(a, \psi) \cos \psi d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} u_i(a, \psi) \sin \psi d\psi = 0.$$

Это означает, что величина a является полной амплитудой первой гармоники колебания.

Подставляя функцию (16) в уравнение (15) и воспользовавшись уравнениями (17), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + k_1^2 f &= \varepsilon \left\{ -2k_1 A_1 \sin \psi - 2k_1 a B_1 \cos \psi + \right. \\ &+ k_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + k_1^2 u_1 \left. \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left(A_1 \frac{dA_1}{da} - a B_1^2 + 2k_1 a B_2 \right) \cos \psi - \right. \\ &- 2 \left(k_1 A_2 + 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} a \right) \sin \psi + \\ &+ 2k_1 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + \\ &+ 2k_1 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + k_1^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + k_1^2 u_2 \left. \right\} + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Правая часть уравнения (15) имеет вид $\varepsilon_1 F_1(f) + \varepsilon^2 F_2(f)$. Поэтому, сохраняя в уравнении (16) члены до ε^2 включительно, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon F_1(f) + \varepsilon^2 F_2(f) &= \varepsilon F_1(a \cos \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 [F_2(a \cos \psi) + u_1(a, \psi) + F_1'(f)(a \cos \psi)]. \end{aligned} \quad (19)$$

Приравнявая члены одного порядка по ε и произведя вычисления, аналогичные проведенным в работе [6], найдем

$$u_1(a, \psi) = \frac{q_0(a)}{k_1^2} + \frac{1}{k_1^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_n \cos n\psi}{1 - n^2}, \quad (20)$$

где q_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $F_1(f)$:

$$F_1(f) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(a) \cos n\psi.$$

Вследствие четности функции F_1 коэффициенты при $\sin n\psi$ равны нулю. Величины A_1 и B_1 в уравнениях (17) определяются соотношениями:

$$q_1 + 2k_1 a B_1 = 0, \quad A_1 = 0. \quad (21)$$

Равенство $A_1 = 0$ объясняется отсутствием членов $\sin \psi$ в разложении функции $F_1(f)$ (вследствие консервативного характера системы функция F_1 зависит только от $\cos \psi$). Соотношения (20) и (21) определяют A_1 , B_1 и $u_1(a, \psi)$. Подставляя A_1 и B_1 в (17), можно найти a и ψ с точностью до членов $\sim \varepsilon$.

Для определения A_2 , B_2 и функции $u_2(a, \psi)$ необходимо приравнять коэффициенты при членах $\sim \varepsilon^2$ в правых частях выражений (18) и (19) и воспользоваться соотношениями (20) и (21), определяющими A_1 , B_1 и $u_1(a, \psi)$. Произведя соответствующие вычисления, получим

$$\left. \begin{aligned} q_1^{(1)} + 2k_1 a B_2 &= 0, \quad A_2 = 0, \\ u_2(a, \psi) &= q_0^{(1)} + \frac{1}{k_1^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_n^{(1)} \cos n\psi}{1-n^2}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_2(a \cos \psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} u_1(F_1'f + 2B_1 k_1) \cos \psi d\psi + \frac{4q_1^2}{k_1^2 a^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_2(a \cos \psi) d\psi + \frac{1}{k_1^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{q_n}{1-n^2} \frac{dq_n}{da} + \\ &+ \frac{2}{k_1^2} q_0 \frac{dq_0}{da} + \frac{4q_1^2}{k_1^2 a}, \\ q_n^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_2(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_1(a, \psi) F_1'f \cos n\psi d\psi + \frac{4}{k_1^2 a} q_1 q_n. \end{aligned}$$

Эти соотношения определяют функцию $u_2(a, \psi)$. Для нахождения амплитуды первой гармоники a и фазы ψ с точностью до членов второго порядка необходимо подставить A_2 и B_2 в уравнение (17) и решить затем это уравнение. Согласно (22) $B_2 = -\frac{q_1^{(1)}}{2k_1 a}$. Ограничиваясь первым членом суммы, входящей в выражение для $q_1^{(1)}$, получим

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_2(a \cos \psi) d\psi - \frac{1}{3} q_2 \frac{dq_2}{da} + \\ &+ \frac{2}{k_1^2} q_0 \frac{dq_0}{da} + \frac{4q_1^2}{k_1^2 a}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $F_2 = \frac{k_1^2 f}{2} - (1 - \sqrt{C_1 + 2f})$, получим

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= \frac{1}{\pi} [-2\pi + \sqrt{C_1} E(k)] - \frac{1}{3} q_2 \frac{dq_2}{da} + \\ &+ \frac{2q_0}{k_1^2} \frac{dq_0}{da} + \frac{4q_1^2}{k_1^2 a}. \end{aligned}$$

Величины q_2 , q_1 и q_0 определены выше. Решим теперь уравнение (15) с точностью до членов порядка ε . Для этого необходимо в уравнение (17) подставить A_1 и B_1 из выражений (21). Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$F_1(f) = -k_1^2 f - (1 - \sqrt{C_1 + 2f}),$$

получим для a и ψ уравнения

$$\frac{da}{d\eta} = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\psi}{d\eta} \right)^2 &= k_1^2 + \frac{\varepsilon}{a} \frac{1}{\pi} \left\{ k_1^2 a \pi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{2\pi} \sqrt{C_1 + 2a \cos \psi} \cos \psi d\psi \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из уравнения (23) следует, что с точностью до членов первого порядка по ε амплитуда первой гармоники не зависит от η . Вследствие консервативности рассматриваемой системы этот вывод справедлив с учетом членов любого порядка по ε . Таким образом, $a = \text{const}$.

Можно показать, что после ряда преобразований и вычислений интеграл в правой части уравнения (24) равен

$$I = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{C_1}}{\gamma a} \sqrt{1 + \gamma a} [(\gamma a - 1) K(k) - E(k)], \quad (25)$$

где $k^2 = \frac{2\gamma a}{1 + \gamma a}$; $\gamma = \frac{2a}{C_1}$; $K(k)$ и $E(k)$ — соответственно полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Таким образом, для ψ получим уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\psi}{d\eta} \right)^2 &= k_1^2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) - \frac{4}{3} \frac{V^2}{c^2} \frac{\sqrt{C_1}}{\pi} \times \\ &\times [(\gamma a - 1) K(k) - E(k)] \frac{\sqrt{1 + \gamma a}}{\gamma a}. \end{aligned} \quad (26)$$

В уравнение (26) входит произвольная постоянная C_1 . Она может быть определена из следующих соображений. Скорость частиц плазмы в общем случае находится из соотношения $V_z = 1 - \sqrt{C_1 + 2f}$. Если плазма в целом покоится, то средняя скорость (усредненная по периоду колебаний η) равна нулю, т. е.

$$\bar{V}_z = \int_0^{2\pi} V_z d\psi = 2\pi - \sqrt{C_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \gamma f} d\psi = 0. \quad (26')$$

Воспользовавшись для f первым приближением, получим

$$\sqrt{C_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \gamma a \cos \psi} d\psi.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \gamma a \cos \psi} d\psi = 4(1 + \gamma a)^{1/2} E(k),$$

то

$$\sqrt{C_1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{E(k) (1 + \gamma a)^{1/2}}. \quad (27)$$

Для движущегося плазменного пучка $\bar{V}$ равна V_0 — скорости этого пучка, — а постоянная C_1 определяется условием

$$\sqrt{C_1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{E(k) (1 + \gamma a)^{1/2}} \left(1 - \frac{V_0}{V}\right).$$

Рассмотрим теперь частный случай синусоидальной волны. Тогда $\psi = \omega t - k_z z = -\frac{\omega}{Q} \tau$ и уравнение (26) принимает вид

$$\left(\frac{\omega}{Q}\right)^2 = k_1^2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{1 + \gamma a}}{\gamma a} \frac{\sqrt{C_1}}{\pi} \times \\ \times [(\gamma a - 1) K(k) - E(k)]. \quad (28)$$

Это и есть дисперсионное уравнение решаемой задачи. При нелинейном рассмотрении фазовая скорость распространения волны зависит не только от частоты, но и от амплитуды a распространяющейся волны.

Разберем подробнее уравнение (28) для $\gamma a \ll 1$. При этом $k \ll 1$. Воспользовавшись при малых значениях аргумента рядами для $K(k)$ и $E(k)$, получим

$$\left(\frac{\omega}{Q}\right)^2 = k_1^2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V^2}{c^2} \frac{\sqrt{C_1}}{2} (1 + \gamma^2 a^2). \quad (29)$$

Определяемая соотношением (27) постоянная $C_1 = 1 + \frac{a^2}{8}$. Таким образом, дисперсионное уравнение (29) принимает вид

$$\left(\frac{\omega}{Q}\right)^2 = k_1^2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) - \frac{V^2}{c^2} - \frac{3}{8} \frac{V^2}{c^2} a^2.$$

При $a \rightarrow 0$ оно переходит в линейное дисперсионное уравнение

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{V^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{Q^2}{\omega^2}\right),$$

где k_1 определяется уравнением (1) работ [1, 2].

Как и следовало ожидать, нелинейность привела к зависимости фазовой скорости распространения от амплитуды. Другим следствием нелинейности является возникновение гармоник, т. е. отклонение формы волны от синусоидальной. Это отклонение в первом порядке по a определяется функцией $u_1(a, \psi)$, позволяющей найти истинную форму волны.

Определим амплитуду второй гармоники (нахождение более высоких гармоник производится аналогичным способом). Согласно соотношению (20) амплитуда второй гармоники $a_2 = -\frac{1}{3} \frac{q_2}{k_1^2}$, где

$$q_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{C_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \gamma a \cos \psi} \cos 2\psi d\psi.$$

После ряда вычислений получим

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \gamma a \cos \psi} \cos 2\psi d\psi = \\ = \frac{4}{15} \frac{\sqrt{1 + \gamma a}}{(\gamma a)^2} \{4(1 - \gamma a) K(k) - (4 - 3\gamma^2 a^2) E(k)\}.$$

Поэтому

$$a_2 = -\frac{1}{3k_1^2} \frac{4}{15\pi} \sqrt{C_1} \frac{\sqrt{1 + \gamma a}}{(\gamma a)^2} \times \\ \times \{4(1 - \gamma a) K(k) - (4 - 3\gamma^2 a^2) E(k)\}. \quad (30)$$

Если $\gamma a \ll 1$, то, воспользовавшись выражениями (27) и (30), найдем

$$a_2 = -\frac{64}{15\pi} \frac{a^2}{(1 + 2a)^{5/2}}. \quad (31)$$

С помощью уравнения (26) и соотношения (20) полностью решается задача о распространении электромагнитных волн в плазменных волноводах с точностью до z .

При решении уравнения (14) величина $z = \beta^2 = \frac{V^2}{c^2}$ принималась малой. Решим теперь это уравнение, не предполагая малой величины β^2 , но считая, что величина $\frac{2f}{C_1} \ll 1$. Перепишем уравнение (14) в виде

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \frac{k_1^2}{1 - \beta^2} z = -\frac{2\beta^2}{1 - \beta^2} \left[1 - \sqrt{C_1} \sqrt{1 + \frac{z}{C_1}}\right].$$

Считая $\frac{z}{C_1} \ll 1$, разлагая в ряд и ограни-

чиваясь членами третьего порядка, получим

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \omega^2 z = -\frac{2\beta^2}{1-\beta^2} (1 - \sqrt{C_1}) + \frac{\beta^2}{4(1-\beta^2)} \left(-\frac{z^2}{C_1^2} + \frac{z^3}{2C_1^3} \right). \quad (32)$$

Считая величину $\frac{\beta^2}{4(1-\beta^2)} \left(-\frac{z^2}{C_1^2} + \frac{z^3}{2C_1^3} \right) = \varepsilon f(z)$ малой, найдем решение уравнения (32) с точностью до членов ε . Тогда

$$z = a \cos \psi, \\ \frac{da}{d\eta} = \varepsilon A_1, \quad \frac{d\psi}{d\eta} = \omega + \varepsilon B_1.$$

Постоянную C_1 определим из условия (26'). В нашем случае оно имеет вид

$$\sqrt{C_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{a}{C_1} \cos \psi} d\psi = 2\pi.$$

Так как $\frac{a}{C_1}$ предполагается малым, $C_1 = 1 + \frac{a^2}{8}$. Поэтому уравнение (32) примет вид

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} + \omega^2 z = \frac{\beta^2}{4(1-\beta^2)} \left(\frac{z^3}{2} - z^2 \right) + O(a^2). \quad (33)$$

Воспользовавшись выражениями (21), получим

$$\frac{da}{d\eta} = 0, \quad a = \text{const}, \\ \left(\frac{d\psi}{d\eta} \right)^2 = \omega^2 - \frac{1}{8a\pi} \frac{\beta^2}{1-\beta^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^3 \cos^3 \psi}{2} - a^2 \cos^2 \psi \right] \cos \psi d\psi.$$

Учитывая, что $z = 2f$, окончательно получим

$$\left(\frac{d\psi}{d\eta} \right)^2 = \frac{k_1^2}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} - \frac{3}{8} \frac{a^2 \beta^2}{1-\beta^2}. \quad (34)$$

Для синусоидальной волны найдем

$$\left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 = \frac{k_1^2}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} - \frac{3}{8} \frac{a^2 \beta^2}{1-\beta^2}. \quad (35)$$

При малых β это дисперсионное уравнение переходит в уравнение (30).

В заключение выражаю благодарность К. Д. Синельникову и А. И. Ахизеру за обсуждение результатов работы.

Поступила в Редакцию 3/IX 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. O. Shuman. Z. Phys., 128, 629 (1950).
2. Ya. B. Fainberg. CERN Symposium, 1, 84 (1956).
3. Л. М. Пятигорский. Уч. зап. Харьковск. ун-та, 49, 38 (1953).
4. А. И. Ахизер, Г. Н. Любарский. Докл. АН СССР, 80, 193 (1951).
5. H. K. Sen. Phys. Rev., 97, 849 (1955).
6. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1955.

