



Влияние цилиндрического канала на диффузию нейтронов

Н. И. Лалетин

Пустоты, имеющиеся в активной зоне ядерного реактора, существенно влияют на утечку нейтронов из реактора. Учет этого влияния важен при расчете критической массы реактора. Часто также интересно знать влияние пустых каналов на распространение нейтронов вне активной зоны.

В настоящей статье рассмотрено влияние одиночного полого цилиндрического канала на диффузию нейтронов. Получены выражения для утечки нейтронов через канал, расположенный в центре реактора, и дополнительной утечки нейтронов из-за наличия канала по соседству с ним. Рассмотрено влияние закона распределения потока нейтронов вдоль канала на применимость диффузионных формул.

Введение

Распространение нейтронов в среде с пустотами зависит от числа пустот, приходящихся на единицу объема, их размера и формы.

Если распределение потока нейтронов в пористой среде меняется достаточно медленно, можно считать, что ток, проходящий через любую площадку внутри среды, зависит лишь от градиента распределения нейтронов в данном месте, т. е. будет справедлива теория диффузии. Однако коэффициент пропорциональности между током и градиентом будет не таким, как в сплошной среде: он будет зависеть от размера, формы пустот и количества их на единицу объема. Среднее значение этого коэффициента будет играть роль эффективного коэффициента диффузии пористой среды. Очевидно также, что отклонение распределения нейтронов от линейности будет сказываться совсем не так, как в сплошной среде, и критерий применимости диффузионных формул будет, по-видимому, зависеть от соотношения между размерами пустот и кривизной распределения нейтронов.

Влияние пустот на распространение нейтронов изучалось в ряде работ. В работе Биренса [1] рассматривается изменение длины диффузии нейтронов в среде с пустотами произвольных размеров, форм и для различ-

ной «концентрации» пустот. При этом принималось, что пустоты распределены равномерно и форма их такова, что нейтрон за время одного пробега пересекает поверхность полости не более двух раз. Пользуясь соотношением

$\frac{L^2}{L_0^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}$, где L и L_0 — длины диффузии нейтронов соответственно в среде с пустотами и в сплошном веществе, λ и λ_0 — соответствующие средние длины свободных пробегов нейтронов, автор находит увеличение средней длины свободного пробега нейтронов за счет пустот

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} = \frac{L^2}{L_0^2} = 1 + 2p + \frac{p^2 \left(\frac{2a}{p\lambda} \right)}{\exp \left(\frac{2a}{p\lambda} \right) - 1} + Q \frac{ap}{\lambda}. \quad (1)$$

Здесь p — отношение объема пустоты к объему вещества в ячейке; a — гидравлический радиус пустоты, равный $a = \frac{2pv}{S}$; v — объем вещества в ячейке; S — площадь поверхности пустоты; Q — величина, зависящая только от формы пустот.

Для случая пустот, далеко отстоящих друг от друга, т. е. для $\frac{S\lambda}{v} \ll 1$, формула (1) принимает вид

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} = 1 + 2p + \frac{ap}{\lambda} Q.$$

Для пустот некоторых форм диффузия нейтронов в различных направлениях меняется по-разному. Так, например, для пустот цилиндрической формы диффузия в направлении, параллельном оси цилиндра, увеличится больше, чем в направлении, перпендикулярном оси. Для направления, параллельного оси цилиндра, при $\frac{s\lambda}{v} \ll 1$ из работы [1] можно получить следующий результат:

$$\frac{\lambda_{\parallel}^2}{\lambda_0^2} = 1 + 2p + 2 \frac{ap}{\lambda}. \quad (2)$$

Диффузия в среде с каналами цилиндрической формы исследовалась также С. Л. Соболевым и В. С. Фурсовым в 1948 г. В этих работах принималось распределение плотности нейтронов, линейно меняющееся в направлении, параллельном оси канала, и постоянное в направлении, перпендикулярном оси, и вычислялся дополнительный поток, обусловленный наличием канала, в направлении, параллельном оси канала. В случае одного цилиндрического канала с радиусом a для коэффициента диффузии в направлении, параллельном оси канала, получились следующие результаты:

$$D_{\parallel} = \frac{\lambda}{3} \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + \frac{2a}{\lambda} \right) \right] \quad (3)$$

в работе Соболева,

$$D_{\parallel} = \frac{\lambda}{3} \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + \frac{3\pi}{4} \frac{a}{\lambda} \right) \right]$$

в работе Фурсова¹.

Здесь W — поперечное сечение ячейки.

Во всех упомянутых выше работах исследовалась диффузия нейтронов и не рассматривалось влияние нелинейности распределения потока нейтронов на утечку из канала. Для реактора с поперечной щелью была рассчитана [2] полная утечка нейтронов из щели и исследовано влияние ее на критическую массу реактора. Аналогичная задача для реактора с центральным цилиндрическим каналом была решена Девисоном. В работе [3] приведены результаты этого исследования и указано, что в расчете был использован метод «отрицательных источников».

¹ В работе В. С. Фурсова имеется неточность, в результате которой получается незначительное расхождение с формулой Соболева.

Для отношения $\left(\frac{\Phi}{\partial \Phi} \right)_{r=a}$ на границе канала получено следующее выражение:

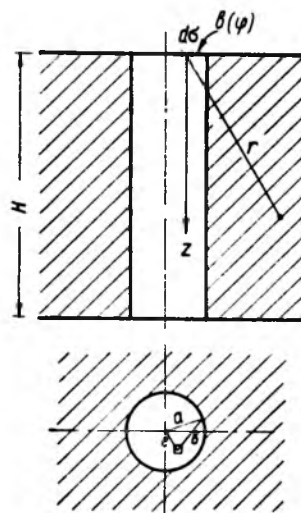
$$\left(\frac{\Phi}{\partial \Phi} \right)_{r=a} = \lambda \frac{1 - \frac{3}{8} (a\alpha)^2}{(a\alpha)^2 \frac{a + \lambda}{a} - \frac{3\pi}{8} (a\alpha)^3}, \quad (4)$$

где Φ — поток нейтронов; a — радиус цилиндра; $\alpha = \frac{\pi}{H}$; H — длина канала; $a\alpha \ll 1$.

Влияние утечки нейтронов через цилиндрический канал на критическую массу реактора изучалось и в работе [4], однако в ней утечка нейтронов вычислена неверно.

Центральный цилиндрический канал

Рассмотрим центральный цилиндрический канал с радиусом a в реакторе высотой H (рисунк). Канал будем считать достаточно



К расчету влияния цилиндрического канала на диффузию нейтронов.

тонким, поэтому распределение потока нейтронов внутри реактора можно представить в виде произведения $\Phi(r, z) = \Phi(z) \phi(r)$, причем $\Phi(z)$ будет, очевидно, иметь вид $\Phi(z) = \sin \alpha(z + \delta)$, где $\alpha = \frac{\pi}{H}$, δ — экстраполированная граница.

Вычислим утечку нейтронов через канал в одну сторону. Ток нейтронов через эле-

ментарную площадку $d\sigma$ отверстия канала, находящуюся на расстоянии e от оси канала, определяется выражением:

$$dJ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_0=\arctg \frac{b(\varphi)}{H}}^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{b(\varphi)}{\sin \theta}}^{\frac{H}{\cos \theta}} dr \frac{\Phi e^{-\frac{r'}{\lambda}} \cos \theta \sin \theta}{4\pi\lambda} d\sigma, \quad (5)$$

где λ — средняя длина свободного пробега нейтрона в сплошном веществе; $r' = r - \frac{b(\varphi)}{\sin \theta}$ — путь нейтрона в сплошном веществе; $b(\varphi) = e \cos \varphi + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi}$. Так как канал расположен в центре реактора, с достаточной точностью можем положить $\psi(r) = \text{const} = 1$. Разложив $\Phi(z)$ в ряд Маклорена и подставив в (5), получим

$$dJ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{b}{\sin \theta}}^{\frac{H}{\cos \theta}} dr \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\Phi_0 z^{2n}}{(2n)!} + \frac{\Phi_1 z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \frac{\alpha^{2n} e^{-\frac{r'}{\lambda}} \cos \theta \sin \theta}{4\pi\lambda} d\sigma,$$

где $\Phi_0 = \Phi(0) = \sin \alpha \delta$ и $\Phi_1 = \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha \cos \alpha \delta$.

Переходя от переменной r к r' , получим

$$dJ = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} dr' \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha^2)^n \times \left[\frac{\Phi_0 \left(r' + \frac{b}{\sin \theta} \right)^{2n} \cos^{2n} \theta}{(2n)!} + \frac{\Phi_1 \left(r' + \frac{b}{\sin \theta} \right)^{2n+1} \cos^{2n+1} \theta}{(2n+1)!} \right] \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda}} \cos \theta \sin \theta}{4\pi\lambda} d\sigma. \quad (6)$$

В последнем выражении удобно выделить из суммы член с $n=0$. Он будет, очевидно, давать ток нейтронов из канала в пластине толщиной H при линейном изменении потока вдоль оси канала. Запишем

выражение для тока нейтронов в виде

$$dJ_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} (\Phi_0 + \Phi_1 r' \cos \theta) \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \times \sin \theta \cos \theta dr' d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} \Phi_1 b \cos^2 \theta \times \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} dr' d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} \times \left[\Phi_0 + \Phi_1 \cos \theta \left(r' + \frac{b}{\sin \theta} \right) \right] \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \times \cos \theta \sin \theta dr' d\theta d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} \times \left[\Phi_0 + \Phi_1 \cos \theta \left(r' + \frac{b}{\sin \theta} \right) \right] \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \times \cos \theta \sin \theta dr' d\theta d\varphi. \quad (7)$$

Первый интеграл в правой части выражения (7) определяет диффузионный ток в отсутствии канала $\frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda}{6} \Phi_1$, второй — дополнительный ток за счет канала в бесконечной среде, остальные члены являются поправками на конечность среды. Обозначим эти интегралы через Y_0 , Y_1 , Y_2 и Y_3 соответственно.

Выполнив интегрирование по r' и θ , получим

$$Y_1 = \frac{\Phi_1}{16} \int_0^{2\pi} b(\varphi) d\varphi, \\ Y_2 = \frac{\Phi_1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b^2(\varphi)}{H} d\varphi + O\left(\frac{b^2}{H^2}\right), \\ Y_3 = O\left(\frac{\lambda^2}{H^2}\right).$$

Отсюда с точностью до членов второго порядка малости относительно b/H и λ/H имеем

$$dJ_0 = \frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda}{6} \Phi_0 + \frac{\Phi_1}{16} \int_0^{2\pi} b(\varphi) d\varphi - \frac{\Phi_1}{4\pi H} \int_0^{2\pi} \times b^2(\varphi) d\varphi. \quad (7')$$

Полная утечка нейтронов через канал

$$J_0 = \int_0^a dJ_0 2\pi e de.$$

Замечая, что $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a 2\pi e deb(e, \varphi) = \frac{16}{3} \pi a^2 a$,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a b^2 2\pi e de d\varphi = 2\pi^2 a^4,$$

имеем

$$J_0 = \pi a^2 \left[\frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda}{6} \Phi_1 + \frac{\lambda}{3} \Phi_1 \frac{a}{\lambda} - \frac{\lambda}{3} \Phi_1 \frac{3}{2} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \right]. \quad (8)$$

Вычислим теперь вклад в выражение (6) от членов суммы с $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} dJ_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha^2)^n \left[\frac{\Phi_0 \cos^{2n} \theta \left(r' + \frac{b}{\sin \theta} \right)^{2n}}{(2n)!} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\Phi_1 \cos^{2n+1} \theta \left(r' + \frac{b}{\sin \theta} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \times \right. \\ &\left. \times \frac{e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \cos \theta \sin \theta \right\} dr' d\theta d\varphi = \\ &= \Phi_1 \int_0^{2\pi} \left[\frac{b^2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n-1)(2n+1)!} + \right. \\ &\left. + 0 \left(\frac{\Phi_0}{\Phi_1} \frac{b^2}{H^2} \ln \frac{b}{H} \right) + 0 \left(\frac{\lambda^2}{H^2} \right) \right] d\varphi \approx \\ &\approx \frac{\Phi_1}{4\pi H} \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \text{Si}(\pi) \right] \int_0^{2\pi} b^2(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{\Phi_1 a^2}{2H} \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \text{Si}(\pi) \right], \end{aligned}$$

где $\text{Si}(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy$.

Интегрируя по площади поперечного сечения канала, имеем

$$J_1 = \int_0^a 2\pi e de dJ_1 = \pi a^2 \frac{\Phi_1 a^2}{2H} \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \text{Si}(\pi) \right] \quad (9)$$

и для полной утечки нейтронов через канал при синусоидальном изменении потока вдоль оси канала получаем выражение

$$J = J_0 + J_1 = \pi a^2 \left[\frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda}{6} \Phi_1 + \frac{\lambda}{6} \Phi_1 \frac{2a}{\lambda} - \frac{\lambda}{6} \Phi_1 \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{2} \text{Si}(\pi) \right) \right]. \quad (10)$$

Кроме утечки нейтронов через канал, его существование вызывает дополнительную утечку нейтронов из реактора через поверхность, находящуюся по соседству с отверстием канала. Действительно, ток нейтронов через элементарную площадку, расположенную на поверхности реактора вблизи отверстия канала на расстоянии ρ от оси канала

$$J_1 = \int_V \frac{\Phi(\rho, z) e^{-\frac{r'}{\lambda}} \cos \theta dV}{4\pi\lambda r^2},$$

где r' — путь нейтрона в веществе. Интегрирование ведется по объему реактора без учета объема канала.

Нетрудно показать, что в диффузионном приближении этот интеграл равняется

$$\begin{aligned} J_+ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{H}{\cos \theta} - \frac{b}{\sin \theta}} \frac{(\Phi_0 + \Phi_1 r' \cos \theta)}{4\pi\lambda} e^{-\frac{r'}{\lambda}} \cos \theta \sin \theta dr' \times \\ &\times d\theta d\varphi + \int_{-\arcsin \frac{a}{\rho}}^{+\arcsin \frac{a}{\rho}} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{\rho \cos \varphi - \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \theta}}^{\frac{\rho \cos \varphi + \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \theta}} dr' \Phi_1 \times \\ &\times \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}{2\pi\lambda} e^{-\frac{r'}{\lambda}} \cos^2 \theta. \quad (11) \end{aligned}$$

Поправки на конечность канала и на нелинейность распределения потока нейтронов вдоль оси канала имеют второй и более высокий порядок малости относительно a/H и λ/H .

Видно, что первый член справа в выражении (11) — диффузионный ток в отсутствии

* $\int_0^{2\pi} b^2(\varphi) d\varphi = 2\pi a^2$ и не зависит от e .

канала $\left(\frac{\Phi_0}{4} + \frac{\lambda}{6} \Phi_1\right)$, а второй член — дополнительная утечка через площадку $d\sigma$, обусловленная существованием канала. Дополнительная утечка нейтронов через поверхность реактора, соседнюю с отверстием канала, выражается следующим интегралом:

$$\Delta L_K = \int_a^\infty 2\pi\rho d\rho \left[\int_{-\arcsin \frac{a}{\rho}}^{+\arcsin \frac{a}{\rho}} \int_0^{\pi/2} d\theta \times \right. \\ \left. \times \int_{\frac{\lambda \cos \varphi - \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}{\sin \theta}}^\infty dr' \Phi_1 \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}}{2\pi\lambda} e^{-\frac{r'}{\lambda} \cos^2 \theta} \right].$$

Интегрирование по ρ распространяем до бесконечности, так как очевидно, что подынтегральная функция быстро убывает с увеличением ρ . Выполним интегрирование по r' и переходя от переменных ρ и φ к переменным $\sigma = \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}$ и $\tau = \rho \cos \varphi - \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}$, имеем

$$\Delta L_K = 2 \int_0^\infty d\tau \int_0^a d\sigma \frac{\Phi_1 \sigma^2}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} \times \\ \times \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\tau}{\lambda \sin \theta}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\lambda}{6} \pi a^2 \Phi_1. \quad (12)$$

Во всех приведенных выше расчетах мы принимали постоянным поперечное распре-

деление плотности нейтронов вблизи канала, пренебрегая изменением его за счет утечки нейтронов через канал. Оценим ошибку, вызванную этим пренебрежением.

Рассмотрим элементарную площадку $d\sigma$ около точки P на внутренней поверхности канала. Ток нейтронов, попадающих через эту площадку в канал,

$$J_+ d\sigma = \int_v \frac{\Phi e^{-\frac{r}{\lambda} \cos \theta} dV}{4\pi\lambda r^2} d\sigma. \quad (13)$$

(За полярную ось принята нормаль к площадке.)

Ограничившись первыми членами разложения функции $\Phi(\rho, z)$ в ряд Маклорена и выполнив интегрирование по r в выражении (13), получим угловое распределение нейтронов, проникающих в канал через $d\sigma$:

$$F(P, \theta, \psi) d\theta d\psi = \frac{\sin \theta \cos \theta}{4\pi} \left\{ \Phi(P) + \right. \\ \left. + \lambda \cos \theta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_P + \lambda \sin \theta \cos \psi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_P \right\},$$

где ψ — угол радиуса-вектора r с осью канала. Выполняя дальнейшее интегрирование в (13), приходим к хорошо известному результату:

$$J_+ = \frac{\Phi(P)}{4} + \frac{\lambda}{6} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_P.$$

Нейтронный ток $J_-(P)$, пересекающий элементарную площадку $d\sigma$ со стороны канала, выражается следующим образом:

$$J_-(P) = \int \frac{F(P', \theta, \psi)}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} d\sigma = J_1 \Phi + J_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + J_3 \Phi,$$

где

$$J_1 = \frac{a^3}{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2(1 - \cos \beta)]^2} + \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2} + z} \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2(1 - \cos \beta)]^2} - \right. \\ \left. - \int_{\frac{H}{2} - z}^{\frac{H}{2}} \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2(1 - \cos \beta)]^2} + \operatorname{tg} \alpha z \left[\int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2} + z} \sin \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2(1 - \cos \beta)]^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\frac{H}{2} - z}^{\frac{H}{2}} \sin \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2(1 - \cos \beta)]^2} \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 J_2 = & \lambda \frac{a^4}{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^3 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} + \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2} + z} \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^3 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} - \right. \\
 & - \int_{\frac{H}{2} - z}^{\frac{H}{2}} \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^3 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} + \operatorname{tg} \alpha z \left[\int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2} + z} \sin \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^3 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} + \right. \\
 & \left. \left. + \int_{\frac{H}{2} - z}^{\frac{H}{2}} \sin \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^3 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} \right] \right\}. \\
 J_3 = & \lambda \frac{a^3}{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [-\alpha \sin \alpha k] k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} + \right. \\
 & + \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2} + z} [-\alpha \sin \alpha k] k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} - \int_{\frac{H}{2} - z}^{\frac{H}{2}} [-\alpha \sin \alpha k] \times \\
 & \times \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} - \operatorname{tg} \alpha z \left[\int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2} + z} (-\alpha k) \cos \alpha k dk \times \right. \\
 & \left. \times \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} + \int_{\frac{H}{2} - z}^{\frac{H}{2}} (-\alpha k) \cos \alpha k dk \int_0^\pi \frac{(1 - \cos \beta)^2 d\beta}{[k^2 + 2a^2 (1 - \cos \beta)]^{5/2}} \right] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь β — угол между плоскостью, проходящей через ось канала и точку P , и плоскостью, проходящей через ось канала и точку P' .

Результирующий ток нейтронов в канал через площадку $d\sigma$ будет равен

$$\begin{aligned}
 J_+ - J_- = & \frac{\Phi}{4} [1 - 4J_1 - 4J_3] + \\
 & + \frac{\lambda \partial \Phi}{6 \partial \rho} \left(1 - \frac{6}{\lambda} J_2 \right).
 \end{aligned}$$

В диффузионном приближении этот поток равен $\frac{\lambda}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)_{\rho=a}$. Отсюда $\left(\frac{\partial \Phi / \partial r}{\Phi} \right)_{\rho=a} = \frac{\frac{1}{4} - J_1 - J_3}{\frac{\lambda}{6} + J_2}$.

Вычисляя усредненные значения интегралов J_1 , J_2 и J_3 , находим

$$\left(\frac{\partial \Phi / \partial \rho}{\Phi} \right)_{\rho=a} \approx \frac{(aa)^2}{\lambda} \left(1 + \frac{\lambda}{a} \right).$$

В силу линейности уравнения (5) пренебрежение изменением поперечного распределения плотности нейтронов дает ошибку

$$\lambda \left(\frac{\partial \Phi / \partial \rho}{\Phi} \right)_{\rho=a} \simeq (aa)^2 \left(1 + \frac{\lambda}{a} \right) \simeq \left(\frac{a}{H} \right)^2.$$

Обсуждение результатов

Для сравнения полученных результатов с результатами других авторов представим, что имеется цилиндрический канал в ячейке системы, причем поперечное сечение ячейки

W много больше поперечного сечения канала πa^2 . Будем сравнивать утечку нейтронов через торцовую поверхность ячейки, считая, что распределение нейтронов в направлениях, перпендикулярных оси канала, постоянно.

В работах Беренса, Соболева и Фурсова наличие канала меняет лишь диффузионные характеристики среды, а утечка из ячейки по-прежнему выражается диффузионной формулой:

$$L_{\pi} = -D_{\parallel} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{\text{гр}} W,$$

где $D_{\parallel} = L_{\parallel}^2 \Sigma_a'$ — коэффициент диффузии; $\Sigma_a' = \Sigma_a \left(1 - \frac{\pi a^2}{W} \right)$ — эффективное сечение поглощения нейтронов в среде с каналом; Σ_a — макроскопическое сечение поглощения в сплошной среде.

Пользуясь этим выражением, из формулы (2) находим

$$D_{\parallel} = \frac{\lambda}{3} \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + 2 \frac{a}{\lambda} \right) \right]$$

и

$$L_{\pi} = -\frac{\lambda}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{\text{гр}} W \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + 2 \frac{a}{\lambda} \right) \right]. \quad (14)$$

В работе Соболева получен точно такой же результат.

Для утечки нейтронов, найденной с помощью формул (10) и (12), имеем

$$\begin{aligned} L_{\pi} &= \left(\frac{\Phi_0}{4} - \frac{\lambda}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) (W - \pi a^2) - \\ &- \frac{\lambda}{6} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \pi a^2 \left[2 + 2 \frac{a}{\lambda} - C \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \right] + \frac{\Phi_0}{4} \pi a^2 = \\ &= \frac{\Phi_0}{4} W - \frac{\lambda}{6} W \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{\text{гр}} \times \\ &\times \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + 2 \frac{a}{\lambda} - C \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \right) \right], \\ C &= \frac{3\pi^2}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3\pi}{2} \text{Si}(\pi). \end{aligned}$$

Используя условие равенства нулю обратного тока нейтронов на границе среды, имеем

$$\begin{aligned} L_{\pi} &= -\frac{\lambda}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{\text{гр}} \times \\ &\times W \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + 2 \frac{a}{\lambda} - C \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \right) \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Видно, что формула (15) отличается от предыдущих лишь членом $\sim \frac{a}{H}$, учитывая

ющим конечность среды и нелинейность распределения потока нейтронов.

Если вычислить утечку через канал в одну сторону с помощью выражения (4), взятого из работы [3], то получим следующий результат:

$$L_{\pi} = -\frac{\lambda}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{\text{гр}} \pi a^2 \left[2 + 2 \frac{a}{\lambda} - \frac{3\pi^2}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \right].$$

Так как при применении метода «отрицательных источников» утечка нейтронов по соседству с каналом не меняется, то утечка из ячейки:

$$\begin{aligned} L_{\pi} &= -\frac{\lambda}{3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{\text{гр}} \times \\ &\times W \left[1 + \frac{\pi a^2}{W} \left(1 + 2 \frac{a}{\lambda} - \frac{3\pi^2}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H} \right) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Эта формула с точностью до членов $\sim \frac{a}{H}$ совпадает со всеми предыдущими, и коэффициент при члене $\frac{a}{H}$ довольно близок к соответствующему коэффициенту формулы (15). Таким образом, в работе [3] дополнительная утечка по соседству с каналом как бы переносится в утечку из канала. Результат в такой форме удобен для вычисления влияния канала на критическую массу. Действительно, мы можем решать уравнение реактора в диффузионном приближении, принимая в качестве граничного условия на стенках канала выражение

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=a} \simeq \frac{\lambda}{(a\lambda)^2 \frac{a+\lambda}{a} - \frac{3\pi}{8} (a\lambda)^2}$$

и оставляя неизменными граничные условия на поверхности реактора, тогда как, если бы мы разделили утечку через канал и дополнительную утечку рядом с каналом, то граничные условия для функции Φ имели бы сложный вид. Выражения для поправок к критической массе за счет канала даны в работе [3].

Из предыдущего рассмотрения видно, что учет конечных размеров среды и отклонений распределения плотности нейтронов от линейного дает члены $\sim a/H$, и если ими можно пренебречь, то для исследования распределения нейтронов в среде с каналом можно пользоваться диффузионной теорией с измененными диффузионными характеристиками.

Легко показать, что все приведенные выше формулы справедливы не только при

постоянном поперечном распределении плотности нейтронов, но и в том случае, если это распределение меняется линейно. При изменении поперечного распределения плотности нейтронов, отличном от линейного, возникает ошибка

$$\eta \approx \frac{(\lambda + a)^2}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{1}{\Phi}.$$

$$\text{При } \Phi(x) = \cos \alpha_{\perp} |x| \approx \frac{(\lambda + a)^2}{2} \alpha_{\perp}^2.$$

$$\text{При } \Phi(x) = e^{\frac{x}{L}} |x| \approx \frac{(\lambda + a)^2}{2L_{\perp}^2}.$$

Цилиндрический канал с экспоненциальным изменением потока нейтронов по длине

Мы установили критерий применимости теории диффузии нейтронов, связанный с размерами канала. Но существует еще другая сторона вопроса. До сих пор мы рассматривали лишь линейный и косинусоидальный ход потока нейтронов по длине канала. При этом ток нейтронов через какое-нибудь сечение канала определяют области, близкие к этому сечению, так как вклад от удаленных областей убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния от этого сечения до них. Если же поток нейтронов по длине канала будет меняться как z^3 или быстрее, то может стать существенной роль данных областей и диффузионное уравнение становится несправедливым. Рассмотрим для примера практически важный случай цилиндрического канала с экспоненциальным распределением нейтронов по длине канала.

В сплошной среде с экспоненциальным ходом потока $\exp z/L$ для применимости диффузионных формул требуется выполнение условия $\lambda \ll L$ (слабое поглощение). Исследуем вопрос о применимости диффузионных формул в случае среды с каналом.

Вычислим ток нейтронов J через сечение канала, находящегося в пластине толщиной H , с экспоненциальным изменением потока по толщине пластины $\Phi(z) = \Phi_0 \exp z/L$. Расстояние от сечения до конца канала в сторону роста экспоненты обозначим буквой h .

Ток нейтронов через элементарную площадку сечения канала, расположенную на расстоянии e от оси канала, равен

$$dJ = dJ_+ - dJ_-, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} dJ_+ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{b}{\sin \theta}}^{\frac{h}{\cos \theta}} dr \times \\ &\times \frac{\Phi_0 e^{\frac{r \cos \theta}{L}} e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \cos \theta \sin \theta; \\ dJ_- &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi-\theta_1} d\theta \int_{\frac{b}{\sin \theta}}^{\frac{H-h}{\cos \theta}} dr \times \\ &\times \frac{\Phi_0 e^{\frac{r \cos \theta}{L}} e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \cos \theta \sin \theta; \\ \theta_1 &= \arctg \frac{b}{H-h}. \end{aligned} \quad (17)$$

Остальные обозначения те же, что и раньше. Представим функцию $\Phi(z)$ в виде суммы по степеням $\frac{z}{L}$:

$$\Phi(z) = \Phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r \cos \theta}{L} \right)^n \frac{1}{n!}.$$

Вклад в интегралы выражений (17) от членов сумм с $n=0$ и $n=1$ описывается формулой (7'), в которую вместо Φ надо подставить Φ_0/L . Если обозначить эту часть тока dJ_0 , то

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^a dJ_0 2\pi e de = -\frac{\lambda \Phi_0}{3L} \times \\ &\times \left[1 + 2 \frac{a}{\lambda} - \frac{3}{2} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{h} - \frac{3}{2} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H-h_1} \right] \pi a^2. \end{aligned}$$

Вклад от остальных членов суммы

$$\begin{aligned} dJ_1 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\theta \int_{\frac{b}{\sin \theta}}^{\frac{h}{\cos \theta}} dr \times \\ &\times \frac{\Phi_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{r \cos \theta}{L} \right)^n e^{-\frac{r'}{\lambda}}}{4\pi\lambda} \sin \theta \cos \theta - \\ &- \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi-\theta_1} d\theta \int_{\frac{b}{\sin \theta}}^{\frac{H-h}{\cos \theta}} dr \times \end{aligned}$$

$$\Phi_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{r \cos \theta}{L} \right)^n e^{-\frac{r'}{\lambda}} \times \frac{1}{4\pi\lambda} \sin \theta \cos \theta.$$

Во втором члене справа под интегралом перейдем от переменной θ к $\vartheta = \pi - \theta$ и в обоих членах — от переменных r к $r' = r - b/\sin \theta$. Далее, выполняя интегрирование и ограничиваясь членами не выше второго порядка малости относительно a/h , λ/h , $a/(H-h)$ и $\lambda(H-h)$, находим

$$J_1 = \int_0^a dJ_1 2\pi e de = -\frac{\Phi_0 \lambda}{3L} \left\{ \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{aL}{h^2} - \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{aL}{(H-h)^2} + \frac{3}{2} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{h} + \frac{3}{2} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{H-h} + \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{L} \left[Z\left(\frac{h}{L}\right) - Z\left(-\frac{H-h}{L}\right) \right] \right\} \pi a^2,$$

где

$$Z(y) = \int_{-\infty}^y \frac{e^t}{t} dt - \frac{e^y}{y} - \frac{e^y}{y^2}.$$

Суммируя J_0 и J_1 и замечая, что

$$\frac{\Phi_0}{L} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0}, \text{ имеем}$$

$$J = -\frac{\lambda}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left\{ 1 + 2 \frac{a}{\lambda} + \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{aL}{h^2} - \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{aL}{(H-h)^2} + \frac{3}{4} \frac{a}{\lambda} \frac{a}{L} \left[Z\left(\frac{h}{L}\right) - Z\left(-\frac{H-h}{L}\right) \right] \right\} \pi a^2.$$

Можно показать, что дополнительный ток нейтронов по соседству с каналом

$$\tilde{J} = -\frac{\lambda}{3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \pi a^2 + 0 \left(\frac{a^2 L^2}{h^4} e^{\frac{h}{L}} \right).$$

Видим, что для совпадения с формулами работ Беренса и Соболева требуется выполнение следующих условий:

$$\frac{a}{h} \ll 1, \frac{a}{H-h} \ll 1 \text{ и } \frac{a}{L} Z\left(\frac{h}{L}\right) \ll 1.$$

При больших $\frac{h}{L} Z\left(\frac{h}{L}\right) \approx \frac{2e^{\frac{h}{L}}}{\left(\frac{h}{L}\right)^3}$ и послед-

нее условие принимает вид

$$\frac{aL^2}{h^3} e^{\frac{h}{L}} \ll 1.$$

В заключение автор благодарит П. Е. Степанова за ценные обсуждения рассмотренных вопросов.

Поступила в Редакцию 16/VIII 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Behrens. Proceed. of Phys. Soc., 62 (s. A), 607 (1949).
2. J. Chernick, J. Kaplan. J. Nucl. Energy, 2, 41 (1955).
3. Пешаген. Материалы Международной конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1955), т. 5, ч. IVa. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 306.
4. E. Gritoph, R. Pearce. J. Nucl. Energy, 4, 445 (1957).

