

СТАТЬИ

УДК 621.039.51

ПОЛУЧЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЦЕННОСТИ НЕЙТРОНОВ В ГЕТЕРОГЕННОМ РЕАКТОРЕ МЕТОДОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГАРМОНИК

Ельшин А.В. (НИТИ им. А.П. Александрова)

В настоящее время в связи с усложнением конструкций ТВС, растущей гетерогенностью активной зоны назрела необходимость отказаться при нейтронно-физическом расчете реактора от традиционно применяемого метода гомогенизации, в котором после получения эффективных малогрупповых характеристик ячеек гетерогенная активная зона по сути превращается в кусочно-гомогенную. Для нахождения распределения нейтронов в такой зоне решается уравнение диффузии конечно-разностными (нодальными) методами, иногда с некоторым учетом гетерогенности. Одним из подходов, демонстрирующих последовательный отказ от гомогенизации, является метод поверхностных гармоник [1]. С помощью этого метода выводится система уравнений (групповых по энергии, конечно-разностных по пространству), описывающая распределение нейтронов в гетерогенном реакторе. Коэффициентами уравнений служат функционалы неких пробных функций, с помощью которых представляется решение уравнения Больцмана для ячеек активной зоны. Таким образом, этот метод, с одной стороны, демонстрирует отказ от применения диффузионного приближения в кусочно-гомогенной активной зоне, с другой, всегда имеется возможность восстановить поле нейтронов во всех компонентах ячейки.

В настоящей работе в отличие от предыдущих намечается более логичный путь получения конечно-разностных уравнений как для распределения нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, так и для сопряженного решения (ценности нейтронов) $\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Основное здесь — более полное по сравнению с работой [2] использование симметричности уравнений для Φ и Φ^+ .

Будем исходить из общего вида интегрально-дифференциального уравнения переноса нейтронов, которое запишем в виде условно-критического уравнения

$$\hat{L}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{k_{\text{эф}}} \hat{K}_f \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = (E, \Omega)$; $\hat{L}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \Omega \nabla \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \Sigma_t \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \int \Sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'$;
 $\hat{K}_f \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \chi(\mathbf{r}, E, E') \nu_f(\mathbf{r}, E') \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'$.

Здесь $k_{эф}$ — собственное число задачи (эффективный коэффициент размножения); $\nu_f(r, E')$ — полное число нейтронов на одно деление, вызванное нейтроном энергией E' ; $\chi(r, E, E')$ — спектр нейтронов деления, вызванного нейтроном энергией E' .

В соответствии с методом поверхностных гармоник для получения стационарных конечно-разностных уравнений гетерогенного реактора распределение нейтронов в каждой элементарной ячейке реактора записывается в виде линейной комбинации пробных функций (индекс ячейки опускаем)

$$\Phi_N(r, v) = \sum A_n \Psi_n(r, v), \quad (2)$$

где A_n — амплитуда пробных функций; $\Psi_n(r, v)$ — пробная функция, удовлетворяющая внутри ячейки кинетическому уравнению

$$\hat{L} \Psi_n(r, v) = \hat{K}_f \Psi_n(r, v) \quad (3)$$

и заданным неоднородным граничным условиям.

Отметим, что в уравнении (3) можно использовать и многогрупповое приближение кинетического уравнения. Для общности, однако, здесь и далее будем использовать уравнение с непрерывной зависимостью от энергии. Отметим также, что уравнение (3) отличается от выражения (1) отсутствием в нем собственного значения $k_{эф}$. Этот нюанс о неизвестном $k_{эф}$ обсуждался [1]. При решении полученных в методе поверхностных гармоник конечно-разностных уравнений необходима либо дополнительная итерационная процедура для пересчета пробных функций, либо аналитическая корректировка пробных функций (описанная, например, в работе [3]). Ввиду этого в настоящей работе не будем касаться объемной невязки, введенной в работе [2].

На практике число слагаемых в решении (2) будет конечно, поэтому оно будет приближенным решением уравнения (1), о чем и говорит нижний индекс N . Подставляя представление (2) в уравнение (1), получим некоторую невязку, сосредоточенную на границах ячеек. Эту невязку можно обратить в нуль, используя ее интегрирование с весом сопряженной функции, которая удовлетворяет, например, уравнению (со своими граничными условиями):

$$\hat{L}^+ \Phi^+(r, v) = \frac{1}{k_{эф}} \hat{K}_f^+ \Phi^+(r, v). \quad (4)$$

В ранних работах по методу поверхностных гармоник эта сопряженная функция (ценность нейтронов) раскладывалась на границах ячеек в ряд по полной системе функций (от r, E, Ω), обращение в нуль первых слагаемых невязки давало систему алгебраических уравнений для связи амплитуд пробных функций в соседних ячейках.

В качестве функций, с помощью которых описывается зависимость распределения ценности нейтронов на границе ячейки от направления полета Ω , выбираются сферические гармоники $Y_{nm}(\Omega)$ [4]. Выбор границ ячеек в замедлителе, вдали от скачкообразного изменения физических свойств (во всяком случае, в двумерном приближении) позволит ограничиться в разложении по $Y_{nm}(\Omega)$ двумя или тремя членами (с $n = 0, 1, 2$).

В качестве функций для представления энергетической зависимости естественно, но не обязательно выбрать характеристические функции интервалов (групп), в которых будет рассматриваться активная зона:

$$\theta_g(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } E \in (E_g, E_{g-1}); \\ 0, & \text{если } E \notin (E_g, E_{g-1}). \end{cases}$$

Здесь G — число групп, в которых рассчитывается активная зона; $g = 1, 2, \dots, G$; E_{g-1} , E_g — границы g -й группы нейтронов. Такой выбор $\theta_g(E)$ приводит к традиционному малогрупповому разбиению нейтронов на границе ячеек.

В качестве функций для описания зависимости распределения нейтронов от координат границы ячеек в работе [5] предложены функции $W_k(r_s)$, вид первых пяти из них для квадратной ячейки показан на рис. 1. Заметим, что первые четыре функции $W_k(r_s)$ тесно связаны с первыми четырьмя функциями Уолша, определенными в работе [6]. Координата r_s отсчитывается от нижнего конца первой грани в направлении против часовой стрелки (рис. 2).

В настоящей работе для нахождения сопряженного решения (ценности нейтронов) в активной зоне будем использовать точно такой же подход, что и для распределения нейтронов, т.е. аналогично запишем решение уравнения (4) в каждой ячейке реактора в виде линейной комбинации некоторых пробных функций (индекс ячейки опускаем):

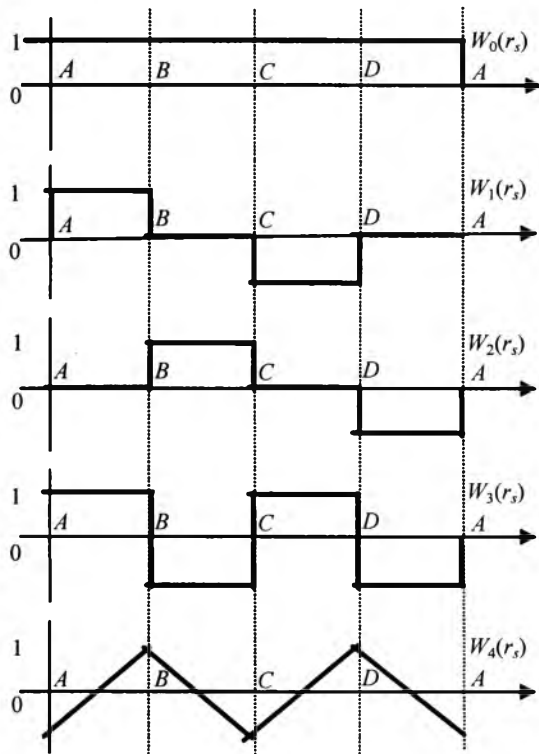
$$\Phi_N^+(r, v) = \sum A_n^+ \Psi_n^+(r, v),$$

где A_n^+ — амплитуда пробных функций; $\Psi_n^+(r, v)$ — пробная функция, удовлетворяющая внутри ячейки сопряженному уравнению

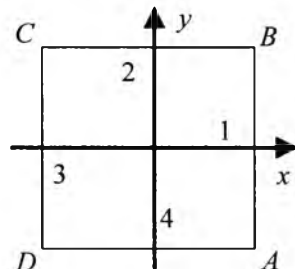
$$\hat{L}^+ \Psi^+(r, v) = \hat{K}_f^+ \Psi^+(r, v) \quad (5)$$

и заданным неоднородным граничным условиям.

В качестве граничных условий для пробных функций будем рассматривать различные упорядоченные по симметрии и степени важности комбинации втекания нейтронов g -й группы, $g = 1, 2, \dots, G$ в ячейку и вытекания из нее. Возможные удобные комбинации для группового приближения кинетического уравнения рассмотрены и предложены в работе [5].



Р и с. 1. Система координатных функций для квадратной ячейки



Р и с. 2. Система координат и нумерация граней для квадратной ячейки

Конкретизируем сказанное для случая (приближения), когда распределение нейтронов в ячейке (двумерная геометрия, квадратная решетка каналов) представляется в виде

$$\Phi_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T \mathbf{I} + \psi_x(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T \mathbf{J}_x + \psi_y(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T \mathbf{J}_y + \xi(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T \chi; \quad (6)$$

$$\Phi_N^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{I}^+ \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T + \mathbf{J}_x^+ \psi_x^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T + \mathbf{J}_y^+ \psi_y^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T + \chi^+ \xi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})^T. \quad (7)$$

В выражениях (6), (7) индекс ячейки опущен, введены векторы пробных функций и их амплитуд, для которых введены новые обозначения, например:

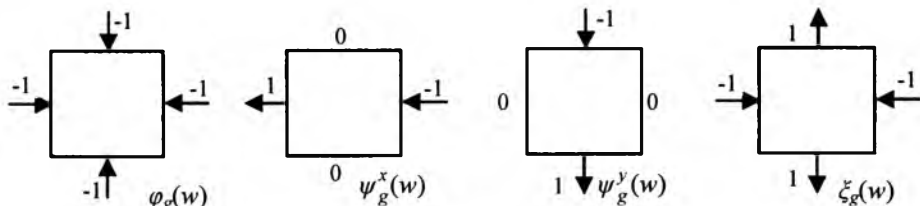
$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ \dots \\ \varphi_G(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \dots \\ I_G \end{pmatrix}; \quad \varphi^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\varphi_1^+(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \dots, \varphi_G^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})); \quad \mathbf{I}^+ = (I_1^+, \dots, I_G^+).$$

Здесь и в дальнейшем для удобства и единообразия примем, что векторы с верхним индексом «+» представляют собой векторы-строки в отличие от остальных общепринятых векторов-столбцов (там, где не устраивает такое расположение элементов в векторах, будем использовать операцию и значок транспонирования «T»). Для квадратной решетки каналов (шаг решетки будем обозначать a) применяются функции, удовлетворяющие следующим граничным условиям (нормаль к границе ячейки направлена наружу, за положительное направление тока принято, таким образом, направление вытекающего из ячейки тока нейтронов):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega (\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \varphi_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\delta_{gg'} \delta_{k0}; \\ \frac{1}{2a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega (\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \psi_g^x(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\delta_{gg'} \delta_{k1}; \\ \frac{1}{2a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega (\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \psi_g^y(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= -\delta_{gg'} \delta_{k2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{1}{4a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega (\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \xi_g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\delta_{gg'} \delta_{k3}; \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad g' = 1, 2, \dots, G.$$

Это означает, что нулевая (симметричная) пробная функция отвечает втеканию в ячейку единичных токов нейтронов с определенным спектром $\theta_g(E)$, $g = 1, \dots, G$. Следующие (антисимметричные по x) функции отвечают протеканию единичного тока нейтронов вдоль оси x , антисимметричные по y — протеканию единичного тока нейтронов вдоль оси y (рис. 3). Выбираются такие направления втекания токов, чтобы плотность потока нейтронов на первой грани была положительна.



Р и с. 3. Втекание нейтронов g -группы для разных пробных функций

Граничные условия для сопряженных пробных функций отличаются направлением тока ценности. Если, например, симметричная пробная функция для прямого распределения нейтронов отвечает втеканию в ячейку тока нейтронов g -й группы, то симметричная пробная функция для сопряженного уравнения есть не что иное, как распределение ценности нейтронов по отношению к утечке из ячейки нейтронов g -й группы со спектром $\theta_g(E)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \varphi_g^+(r_s, \mathbf{v}) &= \delta_{gg'} \delta_{k0}; \\ \frac{1}{2a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \psi_g^{x+}(r_s, \mathbf{v}) &= \delta_{gg'} \delta_{k1}; \\ \frac{1}{2a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \psi_g^{y+}(r_s, \mathbf{v}) &= \delta_{gg'} \delta_{k2}; \\ \frac{1}{4a} \int_0^\infty dE \int_\Gamma dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n}) \theta_{g'}(E) W_k(r_s) \xi_g^+(r_s, \mathbf{v}) &= \delta_{gg'} \delta_{k3}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$k = 0, 1, 2, 3; \quad g' = 1, 2, \dots, G.$$

Утверждается, что между прямыми и сопряженными пробными функциями на границе ячейки (выбранной в замедлителе) существует некоторое соотношение взаимности. Для этого умножим уравнение (3) на $\Psi_n^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, уравнение (5) — на $\Psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, проинтегрируем по углу полета, энергии нейтрона, объему ячейки и вычтем одно из другого. Получим, что

$$\int_{4\pi} d\Omega \int_0^\infty dE \int_\Gamma (\Omega, \mathbf{n}) \Psi_n(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) \Psi_n^+(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) dS = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе ячейки. Разложим в этом выражении угловую зависимость распределения нейтронов и ценности на границе ячейки в ряд по сферическим гармоникам. Используя рекуррентные формулы для сферических функций и ортогональность сферических гармоник, в подынтегральном выражении получим сумму произведений нечетных моментов распределения нейтронов или ценности на линейную комбинацию ближайших (с номерами, отличающимися на единицу) четных моментов распределения ценности или нейтронов.

Воспользуемся тем, что в качестве существенных граничных условий рассматриваем ток нейтронов и ценности — выражения (8), (9). Предположим, что более высокие нечетные угловые моменты задаются нулевыми на границах ячейки. При необходимости их учета следует рассматривать пробные функции, отвечающие этим ненулевым угловым моментам. Тогда из написанного соотношения можно получить

$$\int_0^\infty dE \int_\Gamma [\Psi_n^{(u)+}(r_s, E) \Psi_n^{(1)}(r_s, E) + \Psi_n^{(1)+}(r_s, E) \Psi_n^{(u)}(r_s, E)] dS = 0. \quad (10)$$

Здесь и далее выражения с верхним индексом «(1)» представляют собой нормальный к границе ячейки ток нейтронов или ценности, т.е. первый угловой момент распределения нейтронов или ценности. Выражения с верхним индексом

«(u)» обозначают уровень нейтронов и ценности. Понятие уровня нейтронов введено, например, [1] — это линейная комбинация потока и второго углового момента, или, вернее, поток нейтронов с добавлением части второго углового момента, так как поток нейтронов входит в эту линейную комбинацию с единичным коэффициентом. Для случая, когда $\Psi_n(\mathbf{r}, E, \Omega) = \varphi_g(\mathbf{r}, E, \Omega)$; $\Psi_n^+(\mathbf{r}, E, \Omega) = \varphi_g^+(\mathbf{r}, E, \Omega)$, $g = 1, 2, \dots, G$, из соотношения (10) имеем $\varphi = (\varphi^+)^T$, где элементами матриц φ и φ^+ являются

$$\begin{aligned}\varphi_{g'g} &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_1} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_{g'}^+(E) \varphi_g(r_s, \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_1} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_g(E) \varphi_{g'}^+(r_s, \mathbf{v}) = \varphi_{gg'}^+.\end{aligned}$$

Для антисимметричных (по x и y) пробных функций ввиду симметрии ячейки формируется одна матрица ψ и ψ^+ с элементами (Γ_1 — грань, на которой уровень положителен):

$$\begin{aligned}\psi_{g'g} &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_1} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_{g'}^+(E) \psi_g^x(r_s, \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_2} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_{g'}^+(E) \psi_g^y(r_s, \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_1} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_g^+(E) \psi_{g'}^{x+}(r_s, \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_2} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_g^+(E) \psi_{g'}^{y+}(r_s, \mathbf{v}) = \psi_{gg'}^+.\end{aligned}$$

Для матриц ψ и ψ^+ также справедливо соотношение $\psi = (\psi^+)^T$. Аналогичное соотношение справедливо и для пробных функций ξ_g, ξ_g^+ : $\hat{\xi} = \left(\hat{\xi}^+ \right)^T$, или

$$\begin{aligned}\xi_{g'g}^+ &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_1} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_{g'}^+(E) \xi_g(r_s, \mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{3a} \int_0^\infty dE \int_{\Gamma_2} dr_s \int_{4\pi} d\Omega(\Omega, \mathbf{n})^2 \theta_g^+(E) \xi_{g'}^+(r_s, \mathbf{v}) = \xi_{gg'}.\end{aligned}$$

Умножим уравнение (3) на $\Phi_N(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, проинтегрируем по объему реактора, энергии и углу полета нейтрона. Используя явный вид оператора невязки и соображения, приведенные при выводе соотношения взаимности, получим

$$\begin{aligned}- \int_E dE \int_R dS \left\{ \left[\Phi_{N+}^{(1)+}(\mathbf{r}_s, E) - \Phi_{N-}^{(1)+}(\mathbf{r}_s, E) \right] \frac{\Phi_{N+}^{(u)}(\mathbf{r}_s, E) + \Phi_{N-}^{(u)}(\mathbf{r}_s, E)}{2} + \right. \\ \left. + \left[\Phi_{N+}^{(u)+}(\mathbf{r}_s, E) - \Phi_{N-}^{(u)+}(\mathbf{r}_s, E) \right] \frac{\Phi_{N+}^{(1)}(\mathbf{r}_s, E) + \Phi_{N-}^{(1)}(\mathbf{r}_s, E)}{2} \right\} = 0.\end{aligned}\quad (11)$$

В выражении (11) $\Phi_{N+}^{(j)}(\mathbf{r}_s, E)$ и $\Phi_{N-}^{(j)}(\mathbf{r}_s, E)$, $j = 1, u$ — нормальные токи и уровни нейтронов (или ценности) на наружной и внутренней границах ячеек. Удобно интегралы в выражении (11) сгруппировать и представить в виде суммы по отдельным ячейкам (во избежание громоздкости нижний индекс N в дальнейшем опускаем):

$$-\sum_k \int_E dE \left\{ \int_{\Gamma} dS \{ [\Phi_{k+}^{+(1)}(\mathbf{r}_s, E) - \Phi_{k-}^{+(1)}(\mathbf{r}_s, E)] \Phi_{k-}^{(u)}(\mathbf{r}_s, E) + \right. \\ \left. + [\Phi_{k+}^{(u)+}(\mathbf{r}_s, E) - \Phi_{k-}^{(u)+}(\mathbf{r}_s, E)] \Phi_{k-}^{(1)}(\mathbf{r}_s, E) \} \right\} = 0. \quad (12)$$

В выражении (12) k — индекс ячейки, индексы « $k+$ » и « $k-$ » означают распределение нейтронов и ценности снаружи и внутри ячейки соответственно (нормаль к ячейке направлена наружу, обход по границе ячейки Γ выполняется против часовой стрелки). Таким образом, имеем интегральное соотношение (12), из требования выполнения которого будем получать уравнения, связывающие амплитуды пробных функций в соседних ячейках.

Групповые, средние по граням уровни и токи нейтронов и ценностей для k -й ячейки на i -й грани можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{j}_{ki} = -(\mathbf{I}_k + \mathbf{J}_{xk} \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yk} \sin \alpha_i + \chi_k \cos 2\alpha_i); \\ \mathbf{j}_{ki}^+ = \mathbf{I}_k^+ + \mathbf{J}_{xk}^+ \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yk}^+ \sin \alpha_i + \chi_k^+ \cos 2\alpha_i; \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_{ki} = \varphi_k \mathbf{I}_k + \psi_k (\mathbf{J}_{xk} \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yk} \sin \alpha_i) + \xi_k \chi_k \cos 2\alpha_i = \Phi_k - \mathbf{X}_k \cos 2\alpha_i - \psi_k \mathbf{j}_{ki};$$

$$\mathbf{f}_{ki}^+ = \mathbf{I}_k^+ \varphi_k + (\mathbf{J}_{xk}^+ \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yk}^+ \sin \alpha_i) \psi_k + \chi_k^+ \xi_k \cos 2\alpha_i = \Phi_k^+ - \mathbf{X}_k^+ \cos 2\alpha_i + \mathbf{j}_{ki}^+ \psi_k,$$

где $\Phi_k = (\varphi_k - \psi_k) \mathbf{I}_k$; $\mathbf{X}_k = (\psi_k - \xi_k) \chi_k$; $\Phi_k^+ = \mathbf{I}_k^+ (\varphi_k - \psi_k)$; $\mathbf{X}_k^+ = \chi_k^+ (\psi_k - \xi_k)$; i — индекс соседней ячейки, нумерация начинается справа против часовой стрелки (см. рис. 2), угол α_i измеряется от оси x до направления из центра k -й ячейки на центр i -й грани (или на центр i -й соседней ячейки, подробнее [5]).

Групповые токи и уровни на этой же грани, но снаружи можно записать через амплитуды и матрицы пробных функций соседней i -й ячейки следующим образом (положительное направление тока по наружной нормали к граням k -й ячейки):

$$\mathbf{j}_{ik} = \mathbf{I}_i - \mathbf{J}_{xi} \cos \alpha_i - \mathbf{J}_{yi} \sin \alpha_i + \chi_i \cos 2\alpha_i; \\ \mathbf{j}_{ik}^+ = -\mathbf{I}_i^+ + \mathbf{J}_{xi}^+ \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yi}^+ \sin \alpha_i - \chi_i^+ \cos 2\alpha_i; \quad (14)$$

$$\mathbf{f}_{ik} = \varphi_i \mathbf{I}_i - \psi_i (\mathbf{J}_{xi} \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yi} \sin \alpha_i) + \xi_i \chi_i \cos 2\alpha_i = \Phi_i - \mathbf{X}_i \cos 2\alpha_i + \psi_i \mathbf{j}_{ik};$$

$$\mathbf{f}_{ik}^+ = \mathbf{I}_i^+ \varphi_i - (\mathbf{J}_{xi}^+ \cos \alpha_i + \mathbf{J}_{yi}^+ \sin \alpha_i) \psi_i + \chi_i^+ \xi_i \cos 2\alpha_i = \Phi_i^+ - \mathbf{X}_i^+ \cos 2\alpha_i - \mathbf{j}_{ik}^+ \psi_i.$$

Таким образом, используя выражения (13), (14), соотношение (12) можем записать в виде (интеграл по границе ячейки заменяется суммированием по граням ячейки)

$$-\sum_k \sum_{i=1}^4 \{ (\mathbf{j}_{ik}^+ - \mathbf{j}_{ki}^+) \mathbf{f}_{ki} + (\mathbf{f}_{ik}^+ - \mathbf{f}_{ki}^+) \mathbf{j}_{ki} \} = 0. \quad (15)$$

После взятия в выражении (15) производных по амплитудам пробных функций получим ($k = 1, 2, \dots, K$ — число ячеек в реакторе)

$$\begin{aligned} \sum_i (-\delta \mathbf{j}_{ki}^+ \varphi_k + \delta \mathbf{f}_{ki}^+) &= 0; & \sum_i (-\delta \mathbf{j}_{ki}^+ \psi_k + \delta \mathbf{f}_{ki}^+) \cos \alpha_i &= 0; \\ \sum_i (-\delta \mathbf{j}_{ki}^+ \psi_k + \delta \mathbf{f}_{ki}^+) \sin \alpha_i &= 0; & \sum_i (-\delta \mathbf{j}_{ki}^+ \xi_k + \delta \mathbf{f}_{ki}^+) \cos 2\alpha_i &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где разность (снаружи и внутри) токов и уровней нейтронов и ценности на i -й грани k -й ячейки обозначена как $\delta \mathbf{j}_{ki}^+ = \mathbf{j}_{ik}^+ - \mathbf{j}_{ki}^+$; $\delta \mathbf{f}_{ki}^+ = \mathbf{f}_{ik}^+ - \mathbf{f}_{ki}^+$.

Выражения (16) представляют собой некоторую комбинацию условий сшивки уровней и нормальных токов нейтронов и ценности на границах ячеек. В работе [7] эти условия сшивки на каждой границе рассматривались отдельно, поэтому алгебраическим исключением переменных (амплитуд) были получены пятиточечное и аналог девятиточечного уравнения для некоторым образом усредненных по ячейкам потоков нейтронов. В настоящем случае получили по четыре уравнения на каждую ячейку (не касаемся пока рассмотрения граничных ячеек реактора) и не сможем прийти к традиционному пяти- или девятиточечному уравнению. Однако для всего реактора имеем полный баланс уравнений и сможем разрешить систему уравнений относительно всех неизвестных амплитуд.

Для получения конечно-разностных уравнений, близких к традиционному (диффузионному) виду, используем $\delta \mathbf{j}_{ki}^+$, $\delta \mathbf{f}_{ki}^+$ как параметры малости (в ранних работах эти параметры были нулевыми). Тогда полученные из выражений (13), (14) соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{ki}^+ &= [\Phi_i^+ - \Phi_k^+ - (\mathbf{X}_i^+ - \mathbf{X}_k^+) \cos 2\alpha_i - \delta \mathbf{f}_{ik}^+ - \delta \mathbf{j}_{ki}^+ \psi_i](\psi_i + \psi_k)^{-1}; \\ \mathbf{j}_{ik}^+ &= [\Phi_i^+ - \Phi_k^+ - (\mathbf{X}_i^+ - \mathbf{X}_k^+) \cos 2\alpha_i - \delta \mathbf{f}_{ik}^+ + \delta \mathbf{j}_{ki}^+ \psi_k](\psi_i + \psi_k)^{-1} \end{aligned}$$

представляют собой обобщенную запись закона Фика для токов ценности. Ток ценности в отличие от тока нейтронов направлен в сторону ее возрастания. Для токов нейтронов также можно получить закон Фика (при пренебрежении параметрами малости он выводился и в более ранних работах, например, [5]):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{ki} &= -(\psi_i + \psi_k)^{-1} [\Phi_i - \Phi_k - (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_k) \cos 2\alpha_i - \delta \mathbf{f}_{ik} + \psi_i \delta \mathbf{j}_{ki}]; \\ \mathbf{j}_{ik} &= -(\psi_i + \psi_k)^{-1} [\Phi_i - \Phi_k - (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_k) \cos 2\alpha_i - \delta \mathbf{f}_{ik} - \psi_k \delta \mathbf{j}_{ki}]. \end{aligned}$$

Второе и третье уравнения системы (16) могут использоваться для вычисления амплитуд протекающих через ячейку токов ценности, если их переписать в виде

$$\begin{aligned} 2\mathbf{J}_{xk}^+ &= \sum_{i=1,3} [\Phi_i^+ - \Phi_k^+ - (\mathbf{X}_i^+ - \mathbf{X}_k^+) - \varepsilon_{ki}^{\psi+}] (\psi_k + \psi_i)^{-1} \cos \alpha_i; \\ 2\mathbf{J}_{yk}^+ &= \sum_{i=2,4} [\Phi_i^+ - \Phi_k^+ + (\mathbf{X}_i^+ - \mathbf{X}_k^+) - \varepsilon_{ki}^{\psi+}] (\psi_k + \psi_i)^{-1} \sin \alpha_i, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\varepsilon_{ki}^{\psi+} = \delta \mathbf{j}_{ik}^+ \psi_k - \delta \mathbf{f}_{ki}^+ \psi_k^{-1} (\psi_k + \psi_i) - \delta \mathbf{f}_{ki}^+$; для $i = 1, 3$ $\cos 2\alpha_i = 1$, для $i = 2, 4$ $\cos 2\alpha_i = -1$.

Первое уравнение в системе (16) запишем в виде (аналогичное уравнение получается из четвертого)

$$\sum_{i=1}^4 [\Phi_i^+ - \Phi_k^+ - (X_i^+ - X_k^+) \cos 2\alpha_i - \varepsilon_{ki}^{\varphi+}] (\psi_i + \psi_k)^{-1} - \Phi_k^+ \Sigma_k = 0; \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^4 [-(X_i^+ - X_k^+) + (\Phi_i^+ - \Phi_k^+ + \varepsilon_{ki}^{\xi+}) \cos 2\alpha_i] (\psi_i + \psi_k)^{-1} + X_k^+ \sigma_k = 0,$$

где $\Sigma_k = 4(\varphi_k - \psi_k)^{-1}$; $\sigma_k = 4(\xi_k - \psi_k)^{-1}$; $\varepsilon_{ki}^{\varphi+} = (\delta f_{ki}^+ - \delta j_{ki}^+ \psi_k)(\varphi_k - \psi_k)^{-1}(\varphi_k + \psi_i)^{-1}$;
 $\varepsilon_{ki}^{\xi+} = (\delta f_{ki}^+ - \delta j_{ki}^+ \psi_k)(\psi_k - \xi_k)^{-1}(\xi_k + \psi_i)$.

Если в уравнениях (18) пренебречь параметрами малости (разрывами уровней и токов на границах ячеек) и переменной X_i^+ , связанной с амплитудами дополнительных пробных функций, то первое уравнение системы (18) — обычное диффузионное пятиточечное уравнение, аналогичное конечно-разностной аппроксимации уравнения диффузии.

Система уравнений (17), (18) замкнута для всей активной зоны. Решать эту систему уравнений можно итерационно. Полагая на первой итерации δj_{ki}^+ , δf_{ki}^+ равными нулю, можно из системы уравнений (18) найти потоки Φ_k^+ и амплитуды дополнительных пробных функций. Из соотношений (17) можно найти J_{xk}^+ , J_{yk}^+ во всех ячейках реактора и, таким образом, вычислить новые значения δj_{ki}^+ , δf_{ki}^+ . После этого итерации повторяются, т.е. снова решается система уравнений (18) с вычисленными δj_{ki}^+ , δf_{ki}^+ .

Отметим, что таким же образом можно получить конечно-разностные уравнения для распределения нейтронов:

$$\sum_{i=1}^4 (\psi_i + \psi_k)^{-1} [\Phi_i - \Phi_k - (X_i - X_k) \cos 2\alpha_i - \varepsilon_{ki}^{\varphi}] - \Sigma_k \Phi_k = 0; \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^4 (\psi_i + \psi_k)^{-1} [X_i - X_k - (\Phi_i - \Phi_k + \varepsilon_{ki}^{\xi}) \cos 2\alpha_i] - \sigma_k X_k = 0.$$

$$2J_{xk} = \sum_{i=1,3} (\psi_k + \psi_i)^{-1} [\Phi_i - \Phi_k + (X_i - X_k) - \varepsilon_{ki}^{\psi}] \cos \alpha_i; \quad (20)$$

$$2J_{yk} = \sum_{i=2,4} (\psi_k + \psi_i)^{-1} [\Phi_i - \Phi_k - (X_i - X_k) - \varepsilon_{ki}^{\psi}] \sin \alpha_i,$$

где $\varepsilon_{ki}^{\varphi} = \psi_k \delta j_{ik} + \delta f_{ki} + \psi_k^{-1} (\psi_k + \psi_i) \delta f_{ki}$; $\Sigma_k = 4(\varphi_k - \psi_k)^{-1}$; $\sigma_k = 4(\xi_k - \psi_k)^{-1}$; $\varepsilon_{ki}^{\xi} = (\varphi_k + \psi_i)^{-1}(\varphi_k - \psi_k)^{-1}(\delta j_{ki} \psi_k + \delta f_{ki})$; $\varepsilon_{ki}^{\psi} = (\xi_k + \psi_i)(\psi_k - \xi_k)^{-1}(\delta j_{ki} \psi_k + \delta f_{ki})$.

В уравнения (19), (20) входят те же самые матрицы, что и в уравнения (17), (18), т.е. система конечно-разностных уравнений (19) является сопряженной к системе (18). Основная переменная Φ_k , входящая в уравнения (19), (20), близка к усредненному по граням ячейки групповому потоку нейтронов. Дальнейшие уточнения полученных конечно-разностных уравнений (после записи для трехмерной геометрии) заключаются в увеличении числа пробных функций в ячейках для более корректного представления пространственного распределения нейтронов в ячейках и на их границах. Уточнения также могут идти и в направлении увеличе-

ния числа «сшиваемых» моментов углового распределения нейтронов на границах ячеек. В этом случае для пробных функций необходимо использовать граничные условия и по более высоким угловым моментам.

Таким образом, по аналогии с конечно-разностными уравнениями для распределения нейтронов в гетерогенном реакторе с помощью метода поверхностных гармоник получены конечно-разностные групповые уравнения для ценности нейтронов. Коэффициенты этих уравнений вычисляются как функционалы распределения нейтронов (пробных функций) в ячейках. Отметим, что сопряженность уравнений сохраняется на всех уровнях — как на уровне газокINETического уравнения Больцмана, так и на конечно-разностном его уровне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лалетин Н.И. Уточненные схемы для расчета неоднородных решеток. — В сб.: Теоретические исследования по физике уран-водных решеток типа ВВЭР. Т. 2. Будапешт: Академия Киадо, 1984, с. 387—430.
2. Бояринов В.Ф., Ковалишин А.А. Учет сопряженной функции в методе поверхностных гармоник с объемной невязкой. — В сб.: Труды 9-го семинара по проблемам физики реакторов («Волга-95»). Москва, 4—8 сентября 1995 г., с. 120—122.
3. Ельшин А.В. О конечно-разностных уравнениях для описания распределения нейтронов в трехмерном гетерогенном реакторе. — В сб.: Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов Нейтроника-94. Обнинск, 1996, с. 131—141.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
5. Лалетин Н.И., Ельшин А.В. Вывод конечно-разностных уравнений гетерогенного реактора. 1. Квадратная решетка блоков: Препринт ИАЭ-3280/5, 1980.
6. Walsh J. A closed set of normal orthogonal function. — Am. J. Math., 1923, v. 45, p. 5—24.
7. Ельшин А.В. Обоснование и уточнение метода гомогенизации гетерогенного реактора. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов, 1982, вып. 5(27), с. 85—86.

Поступила в Редакцию 19.02.05

УДК 621.039.548.34

МОДЕЛЬ СОВМЕСТНОГО УПРОЧНЕНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ КОГЕРЕНТНЫМИ И НЕКОГЕРЕНТНЫМИ ВЫДЕЛЕНИЯМИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОБЛУЧЕННЫМ СПЛАВАМ С О.Ц.К.-СТРУКТУРОЙ НА ОСНОВЕ ЖЕЛЕЗА

*Бондаренко А.И., Савин М.М. (ГНЦ РФ — ФЭИ им. А.И. Лейпунского),
Субботин А.В. (НИКИЭТ им. Н.А. Доллежалея)*

Анализ макроскопических явлений, наблюдаемых при воздействии на кристаллические материалы механических, температурных и радиационных нагрузок, во многих случаях связан с изучением поведения взаимодействующих между собой внутренних несовершенств кристалла — точечных дефектов, дислокаций, внутренних границ и фазовых выделений различной природы, как уже имеющих в кристалле, так и возникающих в результате указанных воздействий. В частности, основной причиной радиационного упрочнения сплавов с о.ц.к.-структурой на