

5. **Временная** типовая методика определения экономической эффективности осуществления природоохранных мероприятий и оценки экономического ущерба, причиняемого народному хозяйству загрязнением окружающей среды. Утв. 28.10.83 г. пост. Госплана СССР, Госстроя СССР и Президиума Академии наук СССР.
6. **Радиационно-гигиенический** паспорт предприятия МосНПО «Радон», 1999.
7. **Разрешение** на сбросы радионуклидов в водные объекты. Выдано МосНПО «Радон» Гос. комитетом РФ по охране окружающей среды, № 29 от 19.10.98 г.

Поступила в Редакцию 9.12.02

УДК 621.039.31

СРАВНЕНИЕ ДВУХ ПОДХОДОВ АНАЛИЗА РАЗДЕЛЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ЦЕНТРИФУГЕ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ ПО РАДИУСУ

Александров О.Е. (Уральский гос. технический ун-т — УПИ)

Работа посвящена двум проблемам: объяснению некоторых аспектов метода усреднения по радиусу на основе вихревого потенциала [1—3], которые, как показали недавние публикации [4], не нашли достаточного понимания, и обсуждению фундаментальной роли вихревого потенциала в описании конвективной диффузии.

Далее всюду будет использоваться цилиндрическая система координат (r, ϕ, z) , ось OZ которой совпадает с осью вращения ротора центрифуги, плоскость $z = 0$ проходит через точку подачи питания в разделительную камеру ротора. Всюду, где не оговорено иное, предполагается, что от угловой координаты ϕ ничего не зависит. Рассматривается изотопное приближение, когда в силу малой разницы массы компонентов можно не различать массовую и числовую концентрацию.

Основным методом аналитического описания разделения в газовой центрифуге по настоящее время остается метод усреднения по радиусу [5]. В классической теории Козна при выводе одномерного уравнения диффузии в роторе центрифуги [5, 6] использовали приближенный подход, основанный на использовании функции тока как основной характеристики внутрироторного течения. При выводе уравнения были сделаны некоторые приближения и допущения, ограничивающие применение теории областью однородных вдоль оси ротора циркуляционных потоков и малых потоков питания. Уравнение хорошо описывает основные закономерности процесса разделения, но приводит к некоторым противоречиям при рассмотрении предела отсутствия циркуляционного потока в роторе и оставляет открытым вопрос о применении теории к случаю неоднородного потока циркуляции в роторе и случаю не малой концентрации.

В работах [1—3] обобщен метод усреднения по радиусу на основе разложения поля плотности потока массы внутри ротора газовой центрифуги ρV на вихревую ρV_ψ и потенциальную составляющую ρV_ϕ :

$$\rho V = \rho V_\psi + \rho V_\phi = \rho D \operatorname{rot}(\Psi) + \operatorname{grad}(\phi), \quad (1)$$

где ρ — плотность газа; D — коэффициент диффузии, множитель ρD введен для удобства — обеспечивается безразмерность Ψ и предполагается, что ρD не зависит от координат, единственный отличный от нуля компонент Ψ обусловлен двумер-

ностью течения в цилиндрических координатах; V_ψ , V_φ — соответствующая ско-

рость течения; $\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi \\ 0 \end{pmatrix}$ — векторный потенциал скорости, характеризующий ин-

тенсивность циркуляции; φ — скалярный потенциал, характеризующий транзит-
ный поток. Разложение типа (1) является единственным для непрерывного вектор-
ного поля.

Этот подход показал, что одномерное уравнение диффузии, полученное мето-
дом усреднения по радиусу, остается справедливым для произвольного циркуляци-
онного потока в роторе и может быть получено без основных предположений клас-
сической теории: однородный поток вдоль оси (независимость потока от z или
отсутствие радиальных конвективных потоков), пренебрежение осевым диффузи-
онным потоком, допущение нарушения граничных условий для радиального диф-
фузионного потока.

Наиболее общий вид одномерного уравнения диффузии

$$-\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{f \langle r\Psi \rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle} N(1 - N) + \frac{\langle v_z \rangle + \langle \Psi v_r \rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle} (N - N_i) = 0, \quad (2)$$

здесь $\langle X \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r X(r) dr$; N — средняя по сечению молярная концентрация

изотопа; $f = \Delta m \Omega^2 / kT$; Δm — разность молекулярной массы разделяемых изото-
пов, предполагается $\Delta m > 0$; Ω — угловая скорость вращения центрифуги;
 $v = (V_\varphi / D)$; N_i — концентрация изотопа в отборе ($i = P$) или отвале ($i = W$). Единст-
венным существенным предположением при выводе уравнения (2) являлась замена

$$\langle N(r)X(r) \rangle \approx \langle N(r) \rangle \langle X(r) \rangle \quad (3)$$

при усреднении точного уравнения, полученного тождественным преобразованием
уравнения диффузии [1]. Об ошибках, вносимых в теорию предположением (3),
будет сказано позднее.

К сожалению, как показали последующие публикации [4], разложение поля
потока массы на вихревую и потенциальную часть (1), большая точность и одно-
значность такого описания движения газа в роторе по сравнению с ранее использо-
вавшейся функцией тока не нашли понимания. Так, в работе [4] указывается на два
противоречия теории вихревого потенциала:

«...осевое обогащение отсутствует в прямоточной центрифуге с вязким га-
зом...», но «...с точки зрения [1] осевое обогащение должно возникать из-за конеч-
ной завихренности всего течения...»;

«...осевое обогащение возникает в центрифуге с организацией невязких потен-
циальных потоков по схеме Бимса...», но «...с точки зрения [1] осевое обогащение
должно отсутствовать, так как потенциал циркуляции отличен от нуля только на
поверхности тангенциального разрыва (нулевого объема), разделяющего разнона-
правленные ветви течения...».

Далее делается утверждение о большей строгости анализа разделения на основе классической функции тока с некоторыми изменениями и дополнениями.

Прежде чем обсудить универсальный характер разложения (1) и некоторые общие выводы, следующие из этого разложения, необходимо разъяснить цитируемые противоречия.

В первом случае, если предположить, что имеется в виду классическая прямоточная центрифуга (рис. 1, а), где питание вводится на одном торце ротора, а отбор осуществляется на противоположном торце на разных радиусах, уравнение (2) просто неверно. Теория [1] даст для прямоточной центрифуги иное уравнение. Это связано с иным условием для интегрального потока изотопа вдоль оси ротора:

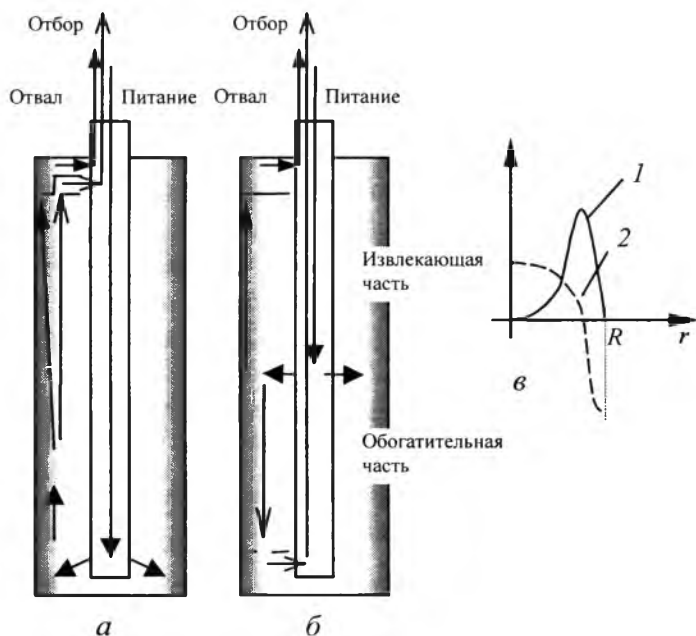
$$\int_0^R \left(\rho V_z N - \rho D \frac{\partial N}{\partial z} \right) = F N_F,$$

где N — концентрация изотопа; N_F — концентрация изотопа в питании. В то время как для центрифуги с отбором и отвалом на разных торцах (рис. 1, б) соответствующее условие гласит:

$$\int_0^R \left(\rho V_z N - \rho D \frac{\partial N}{\partial z} \right) = F N_i,$$

где N_i — концентрация изотопа в отборе ($i = P$) или отвале ($i = W$) в зависимости от того, какая часть ротора, обогащательная или извлекающая, рассматривается. Отметим, что N_i здесь неизвестная константа. Для прямоточной центрифуги применение метода усреднения по радиусу просто невозможно в силу того, что основной эффект разделения связан исключительно с радиальным градиентом. Впрочем, это утверждение справедливо и для теории [4].

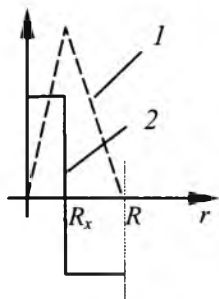
Если же предположить, что в работе [4] под прямоточной подразумевается центрифуга с подачей питания на середине высоты ротора, но без циркуляции газа в роторе (рис. 1, б), то действительно, вязкое течение газа в таком случае создаст из-за прилипания к стенке ротора завихренность течения и как следствие ненулевой вихревой потенциал Ψ в разделительной камере ротора. Однако автор [4] полностью упускает из виду тот факт, что вихревой потенциал как функция радиуса меняет знак



Р и с. 1. Прямоточная центрифуга: а — классическая схема; б — возможно предложенная схема [4]; в — схематический характер радиальной зависимости для плотности потока массы 1 и вихревого потенциала 2

(рис. 1, в) и его среднее значение по радиусу близко к нулю и что знак усредненного по радиусу потенциала (направление вектора $\langle r\Psi \rangle$, см. уравнение (2)) будет в этом случае различным для обогащательной и извлекающей частей ротора — это следует из симметрии течения относительно плоскости подачи питания $z = 0$ и разного знака потока массы ρV_z . Несимметрия, возникающая из-за расположения отверстий отбора и отвала на разных радиусах, мала, так как длина ротора намного больше разницы радиусов. Как следствие внутри ротора возникнет ненулевой осевой градиент концентрации, но этот градиент будет иметь противоположный знак для обогащательной и извлекающей частей ротора и взаимно компенсируется, т.е. не будет наблюдаться в виде внешнего коэффициента разделения центрифуги. Этот градиент может быть обнаружен, если будет измерено распределение концентрации вдоль оси внутри центрифуги или если будет создана заметная несимметрия потоков изменением коэффициента деления потока или смещением точки подачи питания ближе к одному из торцов ротора, что приведет к появлению внешнего коэффициента разделения. Но в любом случае осевой градиент концентрации, связанный с вязким прилипанием газа к стенке, мал, поскольку средняя завихренность мала по сравнению с потоком питания. Таким образом, первое противоречие носит мнимый характер.

Второе противоречие, на которое указывает автор [4], также является результатом некоторого непонимания. В центрифуге с организацией невязких потенциальных потоков по схеме Бимса (рис. 2) отличен от нуля на поверхности тангенциального разрыва ротор потока массы ($\text{rot}(\rho V) \neq 0$), вихревой потенциал для этого случая имеет ненулевое значение во всем объеме ротора. В этом легко убедиться прямым дифференцированием следующего выражения для потенциала (см. также рис. 2):



$$\Psi(r) = \frac{r}{2} \left[\frac{Q_1}{\pi(R^2 - R_x^2)} \eta(r - R_x) - \frac{Q_2}{\pi R_x^2} \eta(R_x - r) \right];$$

$$\rho V_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0;$$

$$\rho V_z(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial r \Psi}{\partial r} = \frac{Q_1}{\pi(R^2 - R_x^2)} \eta(r - R_x) - \frac{Q_2}{\pi R_x^2} \eta(R_x - r),$$

где Q_i — полный массовый поток по одну ($i = 1$) и по другую ($i = 2$) сторону границы разрыва скорости; R — радиус ротора; R_x — положение границы тангенциального разрыва скорости; η — функция Хевисайда ($\eta(x > 0) = 1$, $\eta(x < 0) = 0$). В этом смысле вихревой потенциал столь же «нелокален», сколь и функция тока, т.е. описывает для данной точки пространства не только состояние течения в ее ближайшей окрестности, но и влияние течения в данной

Р и с. 2. Центрифуга с невязкими потоками по схеме Бимса: 1 — вихревой потенциал Ψ ; 2 — плотность потока массы ρV_z для случая $Q_1 = Q_2$

точке на перенос изотопа во всем объеме ротора. Для векторного поля с разрывом определение вихревого потенциала неоднозначно, но это не означает неприменимости теории [1] к разрывным течениям, а только требует более внимательного подхода при выделении вихревой и потенциальной составляющей течения для таких случаев. В реальности это ограничение несущественно, поскольку дозвуковые вязкие течения всегда непрерывны. Таким образом, второе противоречие объясняется неправильным пониманием вихревого потенциала, а не некорректностью теории [1].

В заключение обсуждения отметим, что теория [1] никак не ограничивает соотношение интенсивностей потока питания и циркуляционного потока, как это ошибочно утверждается [4].

Теория на базе вихревого потенциала [1] и теория на основе функции тока [4] приводят к одинаковым одномерным уравнениям для диффузионного переноса в роторе. Более того, как это отмечено [1], при выполнении определенных условий функция тока и вихревой потенциал могут быть однозначно выражены один через другой. Наглядность и трудоемкость вывода уравнения, а также окончательные уравнения могут быть сравнены читателями самостоятельно. Оба подхода в качестве основного отличия от предшественников [5, 6] отмечают необходимость разделения внутрироторного течения на две части: циркуляционную и транзитную и предлагают способ такого разделения. Возникает вопрос: какой способ более точно описывает реальные физические процессы разделения?

Приведем аргументы в пользу подхода на основе вихревого потенциала. Прежде всего следует отметить большую универсальность Ψ как способа описания циркуляционных течений — вихревой потенциал в отличие от функции тока определен не только для плоских течений, но и для произвольных трехмерных течений и, следовательно, обеспечивает более универсальное описание течения.

Разложение векторного поля на вихревую и потенциальную части является естественным, т.е. опирается на основы гидродинамики, выделяющей потенциальные и вихревые течения как самостоятельные типы течений, обладающие существенными различиями в свойствах. Выделение переноса изотопа вихревой частью течения как особого типа переноса опирается на принципиальные особенности уравнения конвективной диффузии. Проще всего продемонстрировать особую роль вихревого потенциала следующим тождественным преобразованием двумерного уравнения диффузии с учетом разложения (1):

$$\operatorname{div} \left(\rho D \left[\begin{pmatrix} 1 & \Psi \\ -\Psi & 1 \end{pmatrix} \operatorname{grad} N + \mathbf{e}_r f_r N (1 - N) \right] - \rho \mathbf{V}_\varphi N \right) = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор, сонаправленный с осью OR системы координат. Проверить тождественность (4) исходному уравнению конвективной диффузии

$$\operatorname{div}(\rho D[\operatorname{grad} N + \mathbf{e}_r f_r N (1 - N)]) - \rho \mathbf{V} \operatorname{grad} N = 0$$

можно прямым вычислением дивергенции в уравнении (4) с учетом уравнения непрерывности $\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$. Тождественность уравнений позволяет утверждать, что в произвольном плоском течении газа эффективный поток компонента смеси Φ может быть записан в виде

$$\Phi = -\rho D \left[\begin{pmatrix} 1 & \Psi \\ -\Psi & 1 \end{pmatrix} \mathbf{grad} N + \mathbf{e}_r f r N (1 - N) \right] + \rho V_\varphi N. \quad (5)$$

Термин «эффективный» поток компонента здесь означает, что в уравнение (5) не включен поток компонента, обусловленный вихревым движением смеси в отсутствие градиента концентрации.

Из уравнения (5) следует, что потенциальная составляющая потока массы ответственна за перенос изотопа как целого за пределы ротора. Перенос изотопа как целого возникает всегда, когда есть потенциальная составляющая течения, независимо от наличия градиента концентрации. Этот тип переноса нельзя исключить из соотношения (5) при рассмотрении диффузии в ограниченном объеме — именно эта составляющая потока описывает питание, отбор и отвал.

Перенос изотопа вихревой составляющей потока имеет место только в условиях существования градиента концентрации. В отсутствие градиента концентрации и (или) внешних сил вихревая составляющая потока не может создать градиент и не приводит к переносу изотопа из одной точки пространства в другую. Поэтому для ограниченного объема перенос изотопа вихревой составляющей потока может быть преобразован к виду (5). Заметим здесь, что уравнение (5) удовлетворяет граничным условиям непротекания изотопа, так как в силу определения $\Psi = \text{const}$ на границе объема (разделительной камеры), и эта константа может быть выбрана равной нулю без потери общности.

Основное преимущество описания на базе вихревого потенциала — данное разложение дает возможность однозначного разделения потока на транзитную (потенциальную) и циркуляционную (вихревую) составляющую, что важно для анализа разделения. В подходе на основе функции тока для выделения транзитной составляющей потока и определения ее пространственного распределения приходится привлекать дополнительные плохо обоснованные соображения [4]. Теория на основе вихревого потенциала прежде всего гарантирует однозначность разложения (1) [7] и дает уравнение для определения вида φ и, следовательно, уравнение для транзитного потока в разделительной камере ротора:

$$\Delta \varphi = f(r, z) - p(r, z) - w(r, z);$$

$$\mathbf{grad}(\varphi) \Big|_{(r, z) \in S} = 0, \quad (6)$$

где $f(r, z)$ — пространственное распределение источника массы (питания), удовлетворяющее условию: интеграл по объему ротора O от $f(r, z)$ равен потоку питания $\left(\int_0 \int f(r, z) dO = F \right)$; аналогично $p(r, z)$ и $w(r, z)$ — пространственное распределение стока массы, связанное с отбором и отвалом; S — внутренняя поверхность разделительной камеры.

Уравнение (6) может быть получено из следующих соображений. Уравнение непрерывности $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ должно выполняться для полного (суммарного) потока массы, но для вихревой составляющей это уравнение выполняется тождественно [$\text{div}(\mathbf{rot}(\Psi)) \equiv 0$] и, следовательно, только потенциальная составляющая определя-

ется этим уравнением, откуда вытекает соотношение (6). Объемные источники и стоки массы записаны для общности, в центрифуге обычной конструкции источники и стоки массы правильнее учесть в граничных условиях, в этом случае уравнение (6) можно записать так:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0; \\ \left\{ \begin{aligned} \text{grad}(\varphi) \Big|_{(r,z) \in S_0} &= 0; \\ \text{grad}(\varphi) \Big|_{(r,z) \in S_F} &= \mathbf{f}_s(r, z); \\ \text{grad}(\varphi) \Big|_{(r,z) \in S_P} &= -\mathbf{p}_s(r, z); \\ \text{grad}(\varphi) \Big|_{(r,z) \in S_W} &= -\mathbf{w}_s(r, z), \end{aligned} \right. \quad (7) \end{aligned}$$

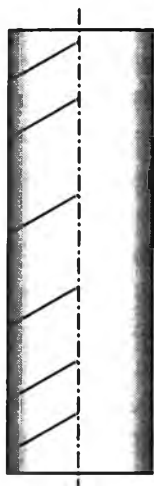
где S_0 — внутренняя поверхность разделительной камеры, за исключением поверхности, где расположены ввод питания (S_F), вывод отбора (S_P) и отвала (S_W); $\mathbf{f}_s$, $\mathbf{p}_s$, $\mathbf{w}_s$ — соответствующие плотность потока массы на поверхности ротора в области питания, отбора и отвала.

Самый важный вывод, который можно сделать из уравнений (6), (7), — распределение транзитной составляющей потока массы по объему ротора центрифуги (вид векторного поля) зависит только от положения ввода/вывода потоков, соотношения интенсивностей потоков отбора и отвала, вида распределения потоков на границе. Распределение транзитной составляющей потока массы не зависит от абсолютной интенсивности потока питания.

На вид векторного поля транзитных потоков не влияет вид поля циркуляции в роторе. Обратное неверно, поле циркуляции зависит от поля транзитного потока. Это очевидным образом следует из того факта, что при отсутствии специально организованной циркуляции, но подаче питания и отборе завихренность в роторе отлична от нуля из-за вязкого прилипания газа к стенкам. Сам вихревой потенциал определяется решением уравнения Навье—Стокса для полной плотности потока массы $\rho\mathbf{V} = \rho D \text{rot}(\Psi) + \text{grad}(\varphi)$, где Ψ — неизвестная функция, скалярный потенциал φ определяется уравнением (6) или (7).

Можно сделать еще одно замечание относительно теории [4]. Результирующее уравнение записано с избыточным числом параметров — использованы три параметра, в то время как уравнение (2) утверждает, что независимых параметров в одномерном уравнении диффузии только два. При более детальном рассмотрении [4] видно, что и ее уравнение можно записать только с двумя независимыми параметрами. Использование дополнительного параметра делает уравнение менее понятным и может приводить к ошибкам в анализе разделения.

Основная погрешность метода усреднения по радиусу связана с самой процедурой усреднения точного уравнения диффузии — с предположением (3). В работе [4] предлагается усреднение с весовой функцией, соответствующей радиальному распределению плотности транзитного потока массы. На самом деле предположение (3) не вносит сколько-нибудь заметной погрешности, по крайней мере в одном важном случае — случае гладкого вихря, когда Ψ сохраняет свое направление во всем объеме разделительной камеры. В этом случае поле концентрации в разделительной камере можно описать набором поверхностей равной концентрации, которые могут быть схематически изображены так, как на рис. 3. Усреднение уравнения по радиусу можно проводить не по плоскости $z = \text{const}$, а вдоль поверхности



Р и с. 3. Схематическое изображение линий равной концентрации в разделительной камере

$N = \text{const}$, приписав значение усредненных параметров координате z в месте пересечения поверхности $N = \text{const}$ со стенкой ротора. В этом случае можно получить то же самое уравнение (2), но в силу $N = \text{const}$ вдоль поверхности усреднения предположение (3) будет точным. В этом смысле уравнение (2) остается точным при любом соотношении интенсивности циркуляции и питания, любой скорости вращения ротора и любом радиальном градиенте концентрации.

При рассмотренном подходе к усреднению возникает проблема перехода от $\Psi(r, z)$ к $\langle \Psi \rangle(z)$ и обратно. В реальности для быстровращающихся центрифуг вихревой потенциал $\Psi(r, z)$ может быть приблизительно представлен как $\Psi(z)\delta(r - r_0)$, причем тем точнее, чем быстрее вращается центрифуга или чем тоньше слой газа. Таким образом, достаточное условие применения метода усреднения по радиусу — малость толщины слоя газа по сравнению с длиной разделительной камеры:

$$R - R_0 \ll H,$$

где $R - R_0$ — характерная толщина слоя газа у стенки ротора; H — высота разделительной камеры.

Заключение. Метод усреднения по радиусу приводит к одному и тому же одномерному уравнению диффузии для описания разделения в роторе центрифуги, независимо от того, делается ли вывод на основе функции тока [4—6], или вихревого потенциала [1]. Подход на основе вихревого потенциала предпочтительнее, так как

он естественным и однозначным образом ведет к необходимости разбиения течения в роторе на циркуляционную (вихревую) и транзитную (потенциальную) составляющую;

теория на основе вихревого потенциала позволяет записать уравнение для определения транзитной составляющей потока массы и сделать важные выводы о параметрах, определяющих распределение транзитного потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров О.Е. Применение метода усреднения по радиусу для описания диффузии в газовой центрифуге при неоднородном потоке циркуляции. — Атомная энергия, 1999, т. 86, вып. 3, с. 210—215.
2. Александров О.Е. Идеальная центрифуга. — Там же, т. 87, вып. 3, с. 213—219.
3. Александров О.Е. Идеальная центрифуга. — Журн. техн. физики, 2000, № 9, с. 24—29.
4. Токманцев В.И. Уточненное уравнение для анализа разделения бинарной смеси изотопов в газовой центрифуге методом усреднения по радиусу. — Атомная энергия, 2002, т. 92, вып. 5, с. 360—366.
5. Cohen K. The Theory of Isotope Separation as Applied to the Large-Scale Production of ^{235}U . McGraw-Hill Book, 1951.
6. Обогащение урана. Под ред. С. Виллани. М.: Энергоатомиздат, 1983. 318 с.
7. Корн К., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 830 с.