

8. Пикаев А.К., Косарева И.М., Пирогова Г.Н. и др. Исследование процессов радиолитического газообразования из растворов, моделирующих жидкие РАО. — В сб.: Материалы КНТС «Исследование гранитоидов Нижнекамского массива для захоронения РАО», Санкт-Петербург, 1999, с. 43—149.
9. Kosareva I.M., Savushkina M.K. A study of physicochemical processes determining the state of waste components in underground repositories. — In: H.L.W. Mixed Wastes and Environmental Restoration Working Towards a Cleaner Environment. March 1—5, 1998, Ses. 27, 35.
10. Косарева И.М., Савушкина М.К., Архипова М.М. Исследование процессов термогидролиза при захоронении жидких радиоактивных отходов в глубинных пластах-коллекторах. Тезисы докладов 3-й Рос. конф. по радиохимии. Санкт-Петербург, 2000, с. 196—197.
11. Назина Т.Н., Косарева И.М., Давыдов А.С. и др. Физико-химическая и микробиологическая характеристика подземных вод из наблюдательных скважин глубинного хранилища жидких радиоактивных отходов. — Микробиология, 2000, т. 69, № 1, с. 105—112.
12. Archipova M.M., Kosareva I.M., Petrunaka V.V. Physicochemical and microbiological characteristics of formation fluids of the repository of liquid radioactive wastes. — In: ICEM'01, Belgium, 2001, p. 43.
13. Косарева И.М., Савушкина М.К., Архипова М.М. и др. Температурное поле при глубинном захоронении жидких радиоактивных отходов. — Атомная энергия, 1998, т. 85, вып. 6, с. 441—448.
14. Косарева И.М., Савушкина М.К., Архипова М.М. и др. Температурное поле при глубинном захоронении жидких радиоактивных отходов: моделирование мнс-озтапного удаления. — Там же, 2000, т. 89, вып. 6, с. 435—440.

Поступила в Редакцию 24.01.03

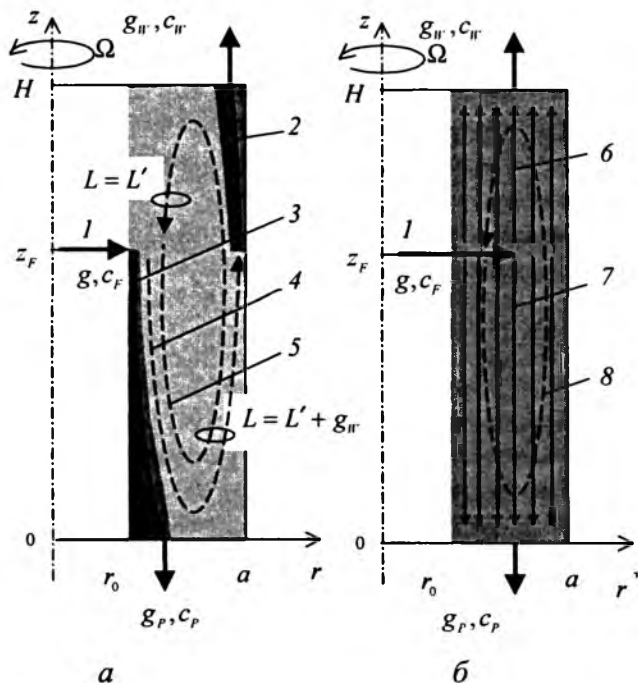
УДК 621.039.31

ОГРАНИЧЕНИЯ МОДЕЛИ ЦЕНТРОБЕЖНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ ИЗОТОПОВ, ОСНОВАННОЙ НА ПРИБЛИЖЕННОМ РАЗЛОЖЕНИИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Токманцев В.И. (Уральский гос. технический ун-т — УПИ)

Для аналитического описания разделения изотопов в газовой центрифуге с заданным гидродинамическим полем в настоящее время обычно используется метод усреднения по радиусу [1—5]. Как известно, классический вариант метода [1, 2] применим только для противоточных центрифуг с малым питанием. При умеренном питании он дает заметную погрешность, а в пределе проточного течения приводит к зависимости, усредненной по радиусу концентрации от осевой координаты, что противоречит закону сохранения изотопа. Приближение [3], несмотря на улучшение стандартной теории с точки зрения выполнения условий непроницаемости для изотопа стенок ротора, в целом не выходит за рамки ее точности. В работе [4] построена более точная разделительная модель, которая позволяет избежать классических ограничений за счет детального анализа структуры противотока (см. рисунок, а).

В работах [5—8] используется иной подход, основанный на приближенном разложении Гельмгольца векторного поля течения (см. рисунок, б). В этом варианте метода усреднения по радиусу эффективный коэффициент радиального обогащения в центрифуге обусловлен исключительно вихревой составляющей поля течения, которая прямо не зависит от питания. Данное приближение подразумевает совпадение течения в области замкнутых линий тока (ядро противотока 5) и вихря



Разбиение по линиям полного тока (а) и приближенное разложение Гельмгольца (б) противоточного течения в separательной области центрифуги: 1 — поток питания; 2, 3 — транзитные потоки отвала и отбора; 4 — часть противотока в обогащательной зоне, связанная с отвалом; 5 — ядро противотока; 6, 7 — потенциальные потоки отвала и отбора; 8 — вихрь

(компонент 8), так как не учитывает вихревые потоки, связанные с питанием (в частности, течение 4).

Цель настоящей статьи — показать, что подход [5] по точности соответствует классическому методу усреднения по радиусу [1, 2]. Обе теории неявно предполагают малость потока питания по сравнению с противотоком и в области своего применения приводят к одинаковым количественным результатам.

Разложение Гельмгольца. Согласно теореме разложения Гельмгольца для произвольного непрерывного векторного поля, в том числе плотности массового потока ρV существует разложение на потенциальный (безвихревую) и соленоидальный (вихревую) компоненты [5—9]:

$$\rho V = \rho V_{\varphi} + \rho V_{\psi}; \quad \rho V_{\varphi} = \text{grad}(\varphi); \quad \rho V_{\psi} = \text{rot}(\psi), \quad (1)$$

где φ — скалярный потенциал; ψ — векторный потенциал.

Вихревой гидродинамический компонент разложения в цилиндрических координатах (r, ϑ, z) имеет вид [9]

$$\text{rot}(\psi) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \psi_{\vartheta}}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_{\vartheta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r\psi_{\vartheta})}{\partial r} - \frac{\partial \psi_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{i}_z,$$

где $r_0 \leq r \leq a$; $0 \leq z \leq H$; r_0 — внутренняя граница separательной области шириной $\Delta r = a - r_0$ ($r_0 = 0$ [5]); a — радиус ротора; H — его высота (см. рисунок). Если под ρV в уравнении (1) понимать возмущение равновесного состояния квазитвердого вращения газа и предположить слабое отклонение системы от равновесия ($\rho \approx \rho_{\text{eq}}$; $\rho V_{\vartheta} = (\partial \psi_r / \partial z - \partial \psi_z / \partial r) + 1/r \partial \varphi / \partial \vartheta \ll \rho \Omega r$), то при осесимметричном характере течения в соответствии с уравнением (1) получим

$$\text{rot}(\psi) \approx \left(-\frac{\partial \psi_{\vartheta}}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi_{\vartheta})}{\partial r} \mathbf{i}_z; \quad \text{grad}(\varphi) \approx \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{i}_z.$$

В этом случае вектор ψ содержит единственный ненулевой компонент ψ_{ϑ} , который имеет обратный знак и может быть обозначен через $-\Psi'(r, z)$ [5]:

$$\psi_{\theta} \equiv -\Psi'(r, z) = \frac{1}{r} \int_{r_0}^r \rho V_{z\psi} r' dr', \quad (2)$$

где предполагается, что $\rho V_r(r_0, z) = \rho V_{r\psi}(r_0, z) = \rho V_{r\varphi}(r_0, z) = 0$ вне точки подачи питания $z = z_F$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho V_r &= \rho V_{r\psi} + \rho V_{r\varphi}; \quad \rho V_{r\psi} = \frac{\partial \Psi'}{\partial z}; \quad \rho V_{r\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \\ \rho V_z &= \rho V_{z\psi} + \rho V_{z\varphi}; \quad \rho V_{z\psi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi')}{\partial r}; \quad \rho V_{z\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

С учетом тождеств $\text{div}[\text{rot}(\psi)] \equiv 0$ и $\text{div}[\text{grad}(\varphi)] \equiv \Delta \varphi$ уравнение непрерывности $\text{div}(\rho V) = \text{div}(\rho V_{\varphi}) = 0$ сводится к уравнению Лапласа для потенциала φ .

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (3)$$

Аналогичным образом может быть проведено формальное разложение плотности потока изотопа Φ :

$$\Phi = \Phi_{\psi} + \Phi_{\varphi}; \quad \Phi_{\psi} = \text{rot}(\psi_D); \quad \Phi_{\varphi} = \text{grad}(\varphi_D), \quad (4)$$

где ψ_D — векторный потенциал; φ_D — скалярный потенциал, причем вектор ψ_D содержит единственный ненулевой компонент $\psi_{D\theta} \equiv -\Psi_D(r, z)$ [5].

В процессах переноса массы и изотопа наряду с потенциальными участвуют и вихревые составляющие, зависящие от питания. Однако в подходе [5] потоки питания g_i не должны вносить прямого вклада в циркуляцию Ψ' . Это существенное ограничение в общем случае искажает профиль вихря и изменяет его интенсивность, поэтому неявно подразумевает малость потока питания по сравнению с интенсивностью циркуляции. Выход за эти рамки, например, учет вихревой составляющей неоднородного прямоточного течения в модели [5] приводит к зависимости, усредненной по радиусу концентрации от осевой координаты, что противоречит закону сохранения изотопа.

Исходная система уравнений для изотопных потенциалов. Разложения (1), (4) позволяют заменить задачу поиска осесимметричных векторных полей ρV и Φ задачей отыскания величин Ψ' , φ и Ψ_D , φ_D . По определению компоненты плотности потока массы целевого изотопа с учетом бародиффузии в центробежном поле имеют вид [2]

$$\Phi_r = -\rho D \left[\frac{\partial c}{\partial r} + frc(1-c) \right] + \rho V_r c; \quad \Phi_z = -\rho D \frac{\partial c}{\partial z} + \rho V_z c,$$

где $c \approx N$ — массовая или мольная доля (концентрация); $f = \Delta M \Omega^2 / RT$; ΔM — разность молярной массы изотопов; Ω — угловая частота вращения ротора; T — температура; R — универсальная газовая постоянная; $\rho D = \text{const}$. При этом условие сохранения изотопа выражается стационарным уравнением конвективной диффузии [2]

$$\operatorname{div}(\Phi) \equiv \rho D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c}{\partial r} + fr^2 c(1-c) \right) + \rho D \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \rho V_r \frac{\partial c}{\partial r} - \rho V_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

С другой стороны, с учетом разложения (4) можно записать

$$\Phi_r = \frac{\partial \Psi_D}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_D}{\partial r}; \quad \Phi_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi_D)}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_D}{\partial z}.$$

В таком представлении уравнение диффузии (5) принимает вид

$$\Delta \varphi_D = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_D}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi_D}{\partial z^2} = 0. \quad (6)$$

Приравнявая выражения для соответствующих компонентов плотности потока изотопа, получим

$$\frac{\partial \Psi_D}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_D}{\partial r} = -\rho D \left[\frac{\partial c}{\partial r} + frc(1-c) \right] + (\rho V_{r\psi} + \rho V_{r\varphi})c; \quad (7)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(r\Psi_D)}{\partial r} + \frac{\partial \varphi_D}{\partial z} = -\rho D \frac{\partial c}{\partial z} + (\rho V_{z\psi} + \rho V_{z\varphi})c. \quad (8)$$

В таком виде задача конвективной диффузии, переформулированная в терминах скалярного и векторного потенциалов, формально поставлена корректно. При заданном гидродинамическом поле $\rho V = \rho V_\psi + \rho V_\varphi$ дифференциальные уравнения (7), (8) вместе с уравнением диффузии (6) и соответствующими краевыми условиями в принципе позволяют найти три неизвестные функции координат Ψ_D , φ_D и c .

Граничные условия для вихрей. Связь потенциалов и полей не является взаимно однозначной. Скалярный потенциал определен с точностью до произвольной постоянной, векторный — с точностью до градиента произвольной функции. Для однозначности разложения Гельмгольца требуется задание условий для потенциалов и их частных производных на границах рассматриваемой области.

Из непроницаемости границ $r = r_0, a$ для вихрей массы и изотопа следует

$$\Psi'(r_0, z) = \Psi'(a, z) = 0; \quad \Psi_D(r_0, z) = \Psi_D(a, z) = 0. \quad (9)$$

Транзитные потоки массы и изотопа обеспечиваются только потенциальной частью разложений (1) и (4), так что интегральные законы сохранения массы и изотопа в произвольном сечении z имеют вид

$$g_i = \int_{r_0}^a (\rho V_z)_i 2\pi r dr = \int_{r_0}^a (\rho V_{z\varphi})_i 2\pi r dr - 2\pi [r\Psi']_{r_0}^a = \int_{r_0}^a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_i 2\pi r dr; \quad (10)$$

$$g_i c_i = \int_{r_0}^a (\Phi_z)_i 2\pi r dr = \int_{r_0}^a (\Phi_{z\varphi})_i 2\pi r dr - 2\pi [r\Psi_D]_{r_0}^a = \int_{r_0}^a \left(\frac{\partial \varphi_D}{\partial z} \right)_i 2\pi r dr, \quad (11)$$

где i — индекс, принимающий значение P для обогатительной и W — для обеднительной зоны ротора; g , g_P , g_W — массовые потоки питания, отбора и отвала; c_0 , c_P , c_W — концентрация питания, отбора и отвала.

Приближенная связь массовых и изотопных потенциалов. Вместо строгого решения краевой задачи отыскания изотопных потенциалов, соответствующих заданному полю течения, в работе [5] используется представление

$$\varphi_D(r, z) = c_i \varphi(r, z); \quad (12)$$

$$\Psi_D(r, z) = c(r, z) \Psi'(r, z) + \delta \Psi(r, z), \quad (13)$$

где $\delta \Psi$ — неизвестная вспомогательная функция, которая с учетом уравнения (9) удовлетворяет условиям $\delta \Psi(r_0, z) = \delta \Psi(a, z) = 0$.

Упрощенное соотношение (12) между скалярными потенциалами справедливо только для радиально однородных потенциальных потоков (см. интегральные условия (9), (10)), что не только означает исключение областей вблизи точки подачи питания и торцов ротора, но и предполагает свободное проникновение потока питания в вихревую область (см. рисунок, б). Однако последнее предположение не соответствует действительности, так как область ядра противотока не содержит источников массы (см. рисунок, а), значит, не имеет потенциальной составляющей и является чисто соленоидальной.

Вид первого слагаемого в правой части соотношения (13) для компонентов векторных потенциалов обусловлен структурой уравнения диффузии (5). Можно показать [8], что поправка $\delta \Psi$ не вносит вклад в уравнение диффузии в силу тождества $\text{div}[\text{rot}(\delta \Psi)] \equiv 0$. Это, однако, не значит, что функцией $\delta \Psi$ можно без потери точности пренебрегать в уравнениях недивергентного вида, например, при вычислении потока изотопа в избранном направлении.

Учитывая приближение (12), нетрудно найти явный вид вихря в модели [5]. Радиально однородный потенциальный поток, неявно предполагающий наличие радиально однородного источника и аналогичного стока массы, а также удовлетворяющий уравнению Лапласа (3) и условиям непротекания через границы $r = r_0, a$, имеет вид

$$\rho V_{r\varphi}(r, z) = 0; \quad \rho V_{z\varphi}(r, z) = \frac{g_i}{\pi(a^2 - r_0^2)} = \text{const}. \quad (14)$$

С учетом соотношения (14) вихревые компоненты разложения (1)

$$\rho V_{r\psi}(r, z) = \rho V_r(r, z); \quad \rho V_{z\psi}(r, z) = \rho V_z(r, z) - g_i / \pi(a^2 - r_0^2). \quad (15)$$

Подстановка уравнения (15) в формулу (2) дает выражение для вихря

$$-r \Psi'(r, z) = \int_{r_0}^r \left(\rho V_z - \frac{g_i}{\pi(a^2 - r_0^2)} \right) r' dr' = \psi_{\text{tot}}(r, z) - \frac{g_i}{2\pi} \frac{r^2 - r_0^2}{a^2 - r_0^2}, \quad (16)$$

где функция полного тока [1, 2]

$$\psi_{\text{tot}}(r, z) = \int_{r_0}^r \rho V_z r' dr'; \quad \psi_{\text{tot}}(r_0, z) = 0; \quad \psi_{\text{tot}}(a, z) = g_i / 2\pi. \quad (17)$$

В соответствии с уравнением (16) любые радиально неоднородные потоки массы, связанные с питанием и входящие в ψ_{tot} , вносят прямой вклад в вихрь $(-r\Psi')$, что противоречит основной идее подхода [5]. Поскольку такие распределения типичны для вязких течений в центрифугах, то к ним подход [5—8] применим только при потоках питания, настолько малых по сравнению с циркуляцией, что можно положить $\psi_{\text{tot}} \approx -r\Psi'$. Отметим, что согласно более точной теории [4] в отсутствие противотока произвольные, в том числе интенсивные неоднородные транзитные потоки не вносят вклад в осевое обогащение. В однородном приближении (14) теория [4] переходит в [5], что резко ограничивает область ее применения.

Приближенная система уравнений для концентрации. Подстановка уравнений (12), (13) в (7), (8) дает систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая совпадает с [5]:

$$-\left[\frac{\partial c}{\partial r} + frc(1-c)\right] + \frac{\rho V_{r\varphi}}{\rho D}(c-c_i) - \Psi \frac{\partial c}{\partial z} - \frac{1}{\rho D} \frac{\partial \delta\Psi}{\partial z} = 0; \quad (18)$$

$$-\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\rho V_{z\varphi}}{\rho D}(c-c_i) + \Psi \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{\rho D r} \frac{\partial (r\delta\Psi)}{\partial r} = 0, \quad (19)$$

где $\Psi = \Psi'/\rho D$. При подстановке уравнения (12) в уравнение диффузии (6) последнее с учетом уравнения (3) удовлетворяется автоматически. В целом замены уравнений (4), (12), (13) приводят к замене дифференциального уравнения диффузии (5) второго порядка приближенной системой двух уравнений (18), (19) первого порядка для двух неизвестных функций координат c и $\delta\Psi$.

Вклад функции $\delta\Psi$ в уравнения (18), (19) исчезает только в равновесном состоянии квазитвердого вращения ($\rho V = 0$, $(\partial c/\partial r)_{\text{eq}} = -frc(1-c)$):

$$\frac{\partial \delta\Psi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\delta\Psi)}{\partial r} = 0. \quad (20)$$

В общем случае пренебрежение этим вкладом согласуется с исходным предположением о слабом отклонении системы от равновесного состояния и подразумевает в определенном смысле малую интенсивность циркуляции.

Далее, исключая $\partial c/\partial z$ из уравнения (18) и $\partial c/\partial r$ из (19), получим

$$-(1 + \Psi^2) \frac{\partial c}{\partial r} - frc(1-c) + \frac{\rho V_{r\varphi} - \Psi \rho V_{z\varphi}}{\rho D}(c-c_i) - \frac{1}{\rho D} \left(\frac{\Psi}{r} \frac{\partial (r\delta\Psi)}{\partial r} + \frac{\partial \delta\Psi}{\partial z} \right) = 0; \quad (21)$$

$$-(1 + \Psi^2) \frac{\partial c}{\partial z} - f\Psi c(1-c) + \frac{\rho V_{z\varphi} + \Psi \rho V_{r\varphi}}{\rho D}(c-c_i) + \frac{1}{\rho D} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\delta\Psi)}{\partial r} - \Psi \frac{\partial \delta\Psi}{\partial z} \right) = 0. \quad (22)$$

В работе [5] при выводе уравнения (21) потерян член $\Psi \rho V_{z\varphi}$. Отметим, что в отличие от уравнения диффузии уравнения (18), (19), (21), (22) по отдельности не имеют дивергентного вида и зависят от вида функции $\delta\Psi$ в уравнении (13).

Усреднение по радиусу. В изотопном приближении уравнение (22) можно усреднить по радиусу в пределах всего разделительного слоя $r_0 \leq r \leq a$, заменяя по теореме о среднем $\langle c(r)X(r) \rangle \approx \bar{c}\langle X(r) \rangle$, если $\langle X(r) \rangle \neq 0$ [9]. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\frac{d\bar{c}}{dz} - f \frac{\langle r\Psi \rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle} \bar{c}(1 - \bar{c}) + \frac{1}{\rho D} \frac{\rho V_{z\varphi} + \langle \Psi \rho V_{r\varphi} \rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle} (\bar{c} - c_i) = \frac{1}{\rho D} \frac{\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial(r\delta\Psi)}{\partial r} \right\rangle - \left\langle \Psi \frac{\partial\delta\Psi}{\partial z} \right\rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle}, \quad (23)$$

где $\langle \rho V_{z\varphi} \rangle = \rho V_{z\varphi}$ — плотность радиально однородного транзитного потока i . На данном этапе указанный способ усреднения так же, как теория [1, 2], приводит к полной потере информации о радиальном различии концентрации в сечении z . В работе [4] показано, что точность метода усреднения по радиусу может быть существенно увеличена с помощью введения средней концентрации в области транзитных потоков.

Уравнения (22), (23) содержат функцию $\delta\Psi(r, z)$. Правая часть уравнения (23) равна нулю в равновесном состоянии квазитвердого вращения (см. уравнение (20)). В неравновесном состоянии первое усредненное слагаемое в числителе правой части также обращается в нуль:

$$\left\langle \frac{1}{r} \frac{\partial(r\delta\Psi)}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{\pi(a^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^a \frac{1}{r} \frac{\partial(r\delta\Psi)}{\partial r} 2\pi r dr = \frac{2a}{a^2 - r_0^2} \delta\Psi(a, z) = 0.$$

Второе слагаемое в этом числителе

$$\left\langle \Psi \frac{\partial\delta\Psi}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{\pi(a^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^a \Psi \frac{\partial\delta\Psi}{\partial z} 2\pi r dr$$

отлично от нуля и учитывает усредненный вклад вихря в радиальный перенос изотопа. Оно мало, если плотность осевого потока массы в вихре значительно превышает плотность радиального потока. Пренебрегая указанным вкладом, получим уравнение для средней концентрации $\bar{c}(z)$ [5]:

$$-\frac{d\bar{c}}{dz} - f \frac{\langle r\Psi \rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle} \bar{c}(1 - \bar{c}) + \frac{1}{\rho D} \frac{\rho V_{z\varphi} + \langle \Psi \rho V_{r\varphi} \rangle}{1 + \langle \Psi^2 \rangle} (\bar{c} - c_i) = 0. \quad (24)$$

Таким образом, уравнение (24) справедливо только в том случае, когда радиальным конвективным (потенциальным и вихревым) переносом изотопа можно пренебречь по сравнению с диффузионным переносом. Точные условия применения этого стандартного предположения классической теории [1, 2], не исключающего, однако, сравнительно слабую зависимость параметров от осевой координаты в длинном роторе, установлены в работе [4]. Данный вывод противоречит утверждению [5] о справедливости уравнения (24) в изотопном приближении при произвольных радиальных потоках массы в вихре.

Приведение уравнений к стандартному виду. Если в уравнении (18) пренебречь радиальными конвективными потоками, в том числе вкладом $\delta\Psi$ и связанной с ними зависимостью осевого градиента концентрации от радиальной координаты, то в изотопном приближении выражение для радиального градиента концентрации принимает стандартный вид [1—4]

$$\frac{\partial c}{\partial r} = -f r \bar{c} (1 - \bar{c}) + \frac{(-r \Psi')}{\rho D r} \frac{d \bar{c}}{dz}. \quad (25)$$

Уравнение (25) отличается от соответствующего уравнения классической теории [1, 2] заменой функции полного тока (17) на «вихрь массы» (16) и в точности совпадает с соответствующими уравнениями [3, 4], что объясняется учетом [3—5] условий непроницаемости боковой стенки ротора (см. уравнение (9)).

Усреднение уравнения (22) по радиусу эквивалентно приближенному вычислению интегрального осевого переноса изотопа. Поэтому, полагая $\langle \Psi \rho V_{r\varphi} \rangle \ll \rho V_{z\varphi}$, можно привести уравнение (24) к стандартному виду [1—4]

$$g_i c_i = g_i \bar{c} + L \left(2 \varepsilon_S \bar{c} (1 - \bar{c}) - K \frac{d \bar{c}}{dz} \right), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} g_i &= \pi (a^2 - r_0^2) \rho V_{z\varphi}; \\ 2 \varepsilon_S L &= -\pi (a^2 - r_0^2) \rho D f \langle r \Psi \rangle = 2 \pi f \int_{r_0}^a (-r \Psi') r dr; \\ KL &= \pi (a^2 - r_0^2) \rho D (1 + \langle \Psi^2 \rangle) = \pi (a^2 - r_0^2) \rho D + \frac{2 \pi}{\rho D} \int_{r_0}^a (-r \Psi')^2 \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Отличие уравнения (26) от классической теории [1, 2] также состоит в замене функции полного тока (17) «вихрем массы» (16). Этот результат, однако, не согласуется с выводами более точных подходов [3, 4]. Неточность, сравнимая с погрешностью [1, 2], вносится в теорию [5] при усреднении концентрации по области $r_0 \leq r \leq a$, в которой распределены обе составляющие приближенного разложения Гельмгольца (12), (13). Полагая $c(r_0, z) \approx \bar{c}(z) \approx c(a, z)$ в слагаемом $g_i \bar{c}$ при $g \geq L$, в работах [1, 2, 5] необоснованно пренебрегают радиальным различием концентрации порядка основного бародиффузионного эффекта. Это классическое приближение справедливо при относительно малом питании $g \ll L$.

Одинаковая структура уравнений переноса [1, 2, 5] приводит к полному совпадению их решений и, в частности, оптимального профиля течения [3, 6], но в работах [1, 2] этот профиль относится к функции ψ_{tot} , [5] — к функции $-r \Psi'$. Однако данное формальное различие несущественно, поскольку показано, что приближение [5] справедливо только при малом питании, когда указанные функции совпадают.

Заключение. Критически проанализирован один из вариантов метода усреднения по радиусу, основанный на приближенном разложении Гельмгольца. Показано, что подход [5] является оригинальным способом описания разделения бинарной смеси изотопов в газовой центрифуге, который содержит следующие основные ограничения: не учитываются вихревые течения, связанные с питанием, предполагается радиальная однородность транзитных потоков, не учитывается радиальный конвективный перенос изотопа, при усреднении по радиусу полностью пренебрегают радиальным различием концентрации. В результате модель [5] неявно пред-

полагает малость потока питания по сравнению с потоком циркуляции, не выходит за рамки точности классического метода усреднения по радиусу [1, 2], и обе теории в области своего применения приводят к одинаковым количественным результатам. По этой причине критика классических работ [1, 2] с позиций [5—8] не обоснованна. Относительная ошибка при вычислении интегральных разделительных характеристик центрифуги в подходах [1—3, 5] приблизительно пропорциональна отношению потока питания g к интенсивности полного противотока L (см. рисунок, a). В отличие от [1—3, 5] подход [4] справедлив при произвольном соотношении g и L , что важно для более корректного решения оптимизационных задач. При этом все варианты метода усреднения по радиусу [1—5] совпадают при отсутствии питания, когда поле течения является соленоидальным, линии тока замкнуты, а различия между функцией полного тока, ядром противотока и вихрем исчезают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cohen K. The Theory of Isotope Separation as Applied to Large-Scale Production of U^{235} . New York: McGraw-Hill Book, 1951. 165 p.
2. Обогащение урана. Под ред. С. Виллани. Пер. с англ. под ред. И.К. Кикоина. М.: Энергоатомиздат, 1983. 320 с.
3. Olander D. The theory of uranium enrichment by the gas centrifuge. — In: Progress in Nuclear Energy, v. 8. New York—London: Pergamon Press Ltd., 1981 (Printed in Great Britain), p. 1—33.
4. Токманцев В.И. Уточненное уравнение для анализа разделения бинарной смеси изотопов в газовой центрифуге методом усреднения по радиусу. — Атомная энергия, 2002, т. 92, вып. 5, с. 360—366.
5. Александров О.Е. Применение метода усреднения по радиусу для описания диффузии в газовой центрифуге при неоднородном потоке циркуляции. — Там же, 1999, т. 86, вып. 3, с. 210—219.
6. Александров О.Е. Идеальная центрифуга. — Там же, 1999, т. 87, вып. 3, с. 213—219.
7. Александров О.Е. Локальная эффективность разделения в газовой центрифуге. — Там же, 2001, т. 90, вып. 5, с. 378—385.
8. Александров О.Е. Разделительная способность газовой центрифуги и некоторые ошибки ее оптимизации. — Там же, 2002, т. 92, вып. 3, с. 212—221.
9. Корн К., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 830 с.

Поступила в Редакцию 25.11.02

УДК 621.384:633. 539.17

ВЫХОД РАДИОНУКЛИДОВ В ВОДНЫЕ РАСТВОРЫ ПРИ ФОТОАКТИВАЦИИ ДВУХФАЗНЫХ МИШЕНЕЙ ТОРМОЗНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ ЭНЕРГИЕЙ 20,5 МэВ

Бураева Е.А., Давыдов М.Г., Марескин С.А., Рахманов И.Б., Шварцман Н.Е.
(НИИ физики при Ростовском гос. ун-те)

Возможности получения радионуклидов с помощью электронных ускорителей известны давно [1]. Особый интерес при этом вызывает использование изобарных цепочек для получения радионуклидов — генераторов целевых радионуклидов [2—4] и/или эффекта ядер отдачи [2, 4]. В последнем случае в (γ, n) -реакциях мож-