

СТАТЬИ

УДК 539.123

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НЕЙТРИННОЙ ДИАГНОСТИКИ ВНУТРИРЕАКТОРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Русов В.Д., Тарасов В.А., Литвинов Д.А., Шаабан И.Ю.
(Одесский национальный политехнический ун-т)

Известно, что ядерный реактор представляет собой исключительно чистый и мощный источник электронных антинейтрино $\bar{\nu}_e$, спектр которых формируется в результате β -распада осколков деления четырех изотопов ядерного топлива: ^{235}U , ^{239}Pu , ^{238}U и ^{241}Pu . Для их регистрации традиционно используется реакция захвата антинейтрино протонами мишени или, иначе говоря, реакция обратного β -распада:



Интенсивность нейтринных событий n_ν , регистрируемых детектором в реакции (1), связана с тепловой мощностью W реактора следующим соотношением:

$$n_\nu = \frac{\langle W \rangle}{\langle E_f \rangle} \frac{\gamma \varepsilon_0}{4\pi \langle R \rangle^2} N_p \sum_\nu, \quad (2)$$

$$\text{где } \sum_\nu = M_\nu \langle \sigma_{\nu p} \rangle; \quad M_\nu = \int_{E_{\text{пор}}}^{E_{\text{max}}} \rho(E_\nu) dE_\nu; \quad \langle \sigma_{\nu p} \rangle = \frac{\int_{E_{\text{пор}}}^{E_{\text{max}}} \sigma_{\nu p}(E_\nu) \rho(E_\nu) dE_\nu}{\int_{E_{\text{пор}}}^{E_{\text{max}}} \rho(E_\nu) dE_\nu}.$$

Здесь $\langle E_f \rangle = \sum (\alpha_i E_{fi})$ — средняя энергия, поглощаемая в реакторе на акт деления при композиции топлива, где α_i — вклад i -го изотопа ($i = 5, 9, 8, 1$) в полное сечение деления [1—12]; $(4\pi \langle R \rangle^2)^{-1}$ — эффективный телесный угол, учитывающий реальное распределение энерговыделения в объеме активной зоны; N_p , $\gamma \varepsilon_0$ — характеристики детектора: число атомов водорода в мишени и эффективность регистрации с учетом доли зарегистрированных нейтронов γ , соответствующих реакции (1); $\sum_\nu \langle \sigma_{\nu p} \rangle$ — сечения нейтринной реакции, размерность которых $\text{см}^2/\text{дел.}$, $\text{см}^2/\nu$ -частиц соответственно для заданной композиции топлива $\sum_\nu = \sum (\alpha_i \sum_{\nu i})$; M_ν — число электронных антинейтрино на один акт деления; $\rho(E_\nu) = \sum (\alpha_i \rho_i)$ — энергетический спектр антинейтрино, $\text{МэВ}^{-1} \cdot \text{дел.}^{-1}$, испускаемый смесью продуктов деления всех составляющих (актиноидов) ядерного топлива; $\sigma_{\nu p}(E_\nu)$ — сечение

взаимодействия моноэнергетических антинейтрино энергией E_ν для реакции (1) с учетом отдачи, слабого магнетизма и радиационных поправок [13—16].

Нетрудно показать [17], что из уравнения (2) следует основное балансовое уравнение спектрометрии реакторных нейтрино, характеризующее вклад α_i каждого актиноида при заданной геометрии и характеристиках детектора в экспериментально измеряемый энергетический спектр антинейтрино $\eta(E_\nu)$:

$$\eta(E_\nu) = \frac{\gamma \varepsilon_0 N_p}{4\pi \langle R \rangle^2} \sum_i \rho_i \sigma_{\nu p}(E_\nu) \lambda_i \Delta t, \quad (3)$$

где

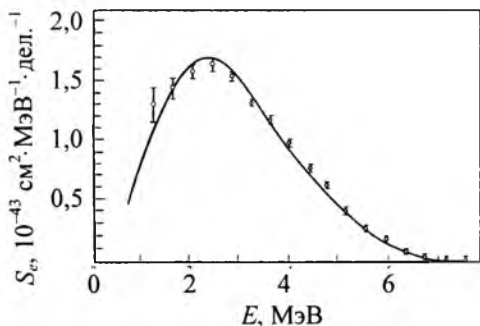
$$\lambda_i = \alpha_i \lambda; \quad \lambda = \langle W \rangle / \langle E_f \rangle; \quad (4)$$

Δt — время измерения; λ , λ_i — средняя и парциальная ($i = 5, 9, 8, 1$) скорость деления ядерного топлива.

Необходимо отметить, что развитые к настоящему времени физические основы дистанционного контроля реакторов по их нейтринному излучению, заложенные работами [18—21], и качественный прорыв в теоретическом анализе реакций реакторных антинейтрино с протонами в совокупности с возросшим уровнем экспериментальной идеологии и техники нейтринных измерений позволяют не только ставить фундаментальные задачи, но и решать основную задачу нейтринной спектрометрии внутриреакторных процессов — восстановление ядерной плотности каждого компонента изотопного состава ядерного топлива и соответственно динамику их изменения непосредственно в процессе работы реактора. Очевидно, что решающим звеном здесь является получение решения уравнения (4) относительно λ_i . Такое решение наряду с поиском оптимальных численных методов должно включать в себя также физическое обоснование методов и процедур определения основных энергетических функций $\eta(E_\nu)$, ρ_i , $\sigma_{\nu p}(E_\nu)$, входящих в это уравнение. Это и явилось предметом настоящей работы.

Постановка задачи. Несмотря на относительно большое число публикаций о регистрации реакторных антинейтрино, авторам статьи удалось отыскать только три эксперимента [5, 22, 23], которые в полной мере отражают суть основного уравнения (3) для спектрометрии реакторных нейтрино, выполненные на Ровенской АЭС в 1984—1986, 1990 и 1997 гг. соответственно (рис. 1—3, табл. 1).

Здесь необходимо привести одно дополнительное замечание, касающееся процедуры получения энергетического спектра $\eta(E_\nu)$ или, другими словами, спектра по месту регистрации $\tilde{\nu}_e$. Спектр антинейтрино может быть непосредственно определен на основе кинетической энергии позитрона T_{e+} , так как она отличается от энергии налетающего нейтрино только на пороговую энергию 1,804 МэВ. Однако, как отмечается в работах [5, 22, 23], из-за



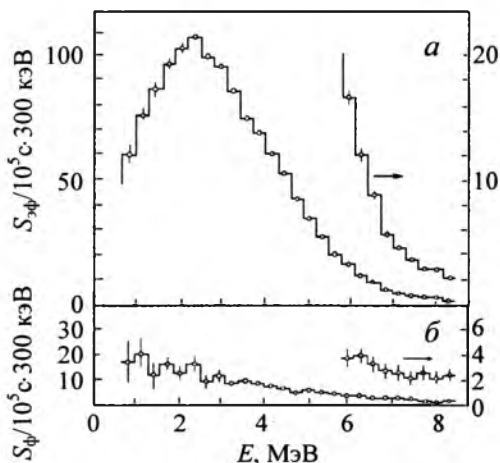
Р и с. 1. Экспериментальный (○) и расчетный (—) спектр позитронов реакции (1) на расстоянии 18 м ([22], эксперимент 3с) (шаг гистограммы 300 кэВ)

частичного поглощения аннигиляционных квантов в рабочем объеме спектрометра наблюдаемая энергия позитрона всегда будет больше истинной кинетической энергии в среднем на ΔT_{e^+} ($\sim 0,6$ МэВ), что приводит к уточнению процедуры сдвига позитронов $S_{e^+}(E_{e^+})$, и это необходимо учитывать при получении энергетического спектра $\eta(E_\nu)$:

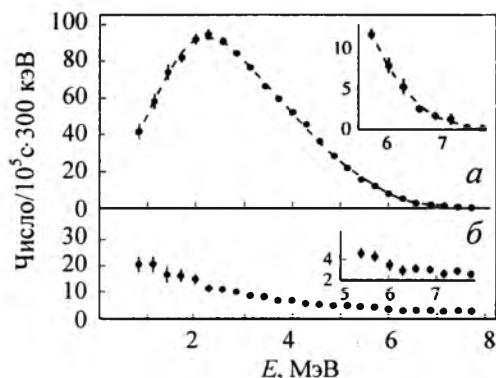
$$E_\nu = (T_{e^+} - \Delta T_{e^+}) + 1,804 \text{ МэВ} + O(E_\nu/M_n). \quad (5)$$

Дополнительная энергия сдвига ΔT_{e^+} , установленная в экспериментах [22, 5, 23], приведена в табл. 1, численные значения энергетических спектров $\eta(E_\nu)$, полученные с помощью процедуры сдвига спектров позитронов (уравнение (5)) — в табл. 2.

Кроме определения спектра $\eta(E_\nu)$ по месту регистрации $\tilde{\nu}_e$, необходимо рассмотреть способ определения спектров ρ_i по месту рождения. Расчетная процедура получения спектра ρ_i по месту рождения $\tilde{\nu}_e$ для данного делящегося ядра основана на хорошей устойчивости, не зависящей от гипотез о характере неизвестных схем распада [2, 24], отношения ν -спектра (ρ_i) к β -спектру (ρ_β) смеси продуктов деления



Р и с. 2. Экспериментальный спектр [5]: а — сумма эффекта и коррелированного фона; б — коррелированный фон



Р и с. 3. Измеренные спектры позитронов реакции (1) (а) и событий коррелированного фона (б) [23]: ● — эксперимент; --- — аппроксимация (шаг гистограммы 290 кэВ)

Таблица 1. Основные характеристики геометрии экспериментов, детектора и реактора

Характеристики	Эксперимент		
	[22]	[5]	[23]
Мишень	Жидкий сцинтиллятор (C_nH_{2n})		
$N_{ps} \cdot 10^{28}$	$1,506 \pm 1,5^*$	$5,820 \pm 1,5$	$5,820 \pm 1,5$
ϵ_0	$0,322 \pm 5,5$	$0,321 \pm 5,5$	$0,321 \pm 5,5$
γ	1,00	0,75	0,75
$\langle R^2 \rangle^{1/2}$, м	$18,18 \pm 0,3$	$18,00 \pm 0,3$	$18,00 \pm 0,3$
$\langle W \rangle$, МВт	$1452 \pm 2,0$	$1375 \pm 2,0$	$1375 \pm 2,0$
ΔT_{e^+} , МэВ	0,50	0,55	0,60
n_ν за 10^5 с	$309,5 \pm 0,7$	—	$835,0 \pm 0,3$
Число измерений	66	70	174

*Погрешность в табл. 1—3 приведена в %.

Т а б л и ц а 2. Экспериментальный $\eta(E)$ и конвертированный спектр ρ_i для интервала энергии 2—9 МэВ

E_ν , МэВ	$\eta(E)$, (МэВ) ⁻¹			ρ_i , (МэВ·дел.) ⁻¹			
	$\eta(E)$ [22]	$\eta(E)/0,30$ [5]	$\eta(E)/0,29$ [23]	²³⁵ U [13]	²³⁹ Pu [13]	²³⁸ U [6]	²⁴¹ Pu [13]
2,0	23,032±3,6	42,857±2,85	21,285±2,21	0,130(+1)±4,2	0,107(+1)±4,5	0,153(+1)	0,124(+1)±4,3
2,5	57,928±3,6	73,571±2,76	53,285±2,23	0,900(0)±4,2	0,710(0)±4,3	0,111(+1)	0,870(0)±4,0
3,0	79,091±2,4	80,357±3,83	74,143±2,40	0,673(0)±4,2	0,491(0)±4,3	0,835(0)	0,623(0)±4,0
3,5	87,267±2,4	91,428±2,91	81,357±3,30	0,473(0)±4,2	0,317(0)±4,3	0,586(0)	0,420(0)±3,9
4,0	84,077±3,4	82,857±5,95	73,042±3,11	0,283(0)±4,2	0,190(0)±4,4	0,386(0)	0,270(0)±3,9
4,5	71,503±2,3	78,428±3,11	60,714±2,28	0,172(0)±4,2	0,107(0)±4,8	0,245(0)	0,157(0)±4,2
5,0	62,129±3,2	60,000±4,13	53,357±4,73	0,105(0)±4,2	0,576(-1)±5,2	0,152(0)	0,920(-1)±4,4
5,5	49,378±2,2	52,142±3,17	35,757±2,18	0,617(-1)±4,2	0,350(-1)±5,9	0,908(-1)	0,525(-1)±4,9
6,0	35,377±3,2	37,857±3,75	25,500±1,91	0,370(-1)±4,3	0,177(-1)±6,8	0,549(-1)	0,267(-1)±5,6
6,5	26,007±2,7	22,499±2,63	15,714±1,93	0,203(-1)±4,4	0,940(-2)±7,4	0,328(-1)	0,139(-1)±6,1
7,0	16,744±2,7	14,999±2,67	7,428±1,73	0,105(-1)±4,7	0,468(-2)±11	0,176(-1)	0,683(-2)±7,0
7,5	8,693±0,48	9,285±1,85	2,642±1,83	0,429(-2)±5,0	0,180(-2)±19	0,787(-2)	0,254(-2)±8,0
8,0	3,562±0,42	6,071±2,31	0,134±0,56	0,136(-2)±6,0	0,500(-3)±35	0,313(-2)	0,890(-3)±11
8,5	1,033±0,45	2,142±1,82	—	0,237(-3)±10	0,220(-3)±80	0,526(-3)	0,235(-3)±24
9,0	0,139±0,36	1,428±1,82	—	0,560(-4)±27	0,398(-4)	0,124(-3)	0,470(-4)±90

Примечание. Для конвертированных спектров $\rho_i(E_\nu)$ в скобках дан десятичный порядок, погрешность приведена в % на уровне 90%-ной достоверности.

каждого актиноида в условиях векового равновесия. Хотя устойчивость этого отношения не имеет ясного физического обоснования [7], тем не менее экспериментальные данные измерения β -спектров осколков деления ²³⁵U, ²³⁹Pu и ²⁴¹Pu [12, 22, 25] с высокой точностью подтвердили результаты расчетного моделирования [2, 24]. Необходимые для дальнейших расчетов данные конвертированных таким образом спектров ρ_i приведены в табл. 2. В случае ²³⁸U, для которого β -спектр не измерялся, используется расчетный [2].

Среди трех выделенных энергетических функций $\eta(E_\nu)$, ρ_i и $\sigma_{vp}(E_\nu)$ наиболее теоретически проработанной является сечение $\sigma_{vp}(E_\nu)$ взаимодействия моноэнергетических антинейтрино энергией E_ν для реакции (1), методика расчета которого подробно изложена во многих работах, в частности, [13—15]. При этом сечение реакции захвата антинейтрино протоном с учетом поведения сечения вблизи порога реакции ($\delta_{пор}$), отдачи ($\delta_{от}$), слабого магнетизма ($\delta_{сл.м}$) и внешней радиационной поправки ($\delta_{рад}$) имеет вид

$$\sigma_{vp}(E_\nu) = \sigma_0(E_\nu) (1 + \delta_{пор}) (1 + \delta_{сл.м} + \delta_{от}) (1 + \delta_{рад}).$$

Аналитические выражения для всех поправок и их подробное обсуждение представлены в работах [14, 15], тогда как сечение $\sigma_0(E_\nu)$, отвечающее приближению бесконечно тяжелых нуклонов (или иначе $E_n \approx m_n$, $E_{e^+} \ll m_n$), имеет вид

$$\sigma_0(E_\nu) = \frac{2\pi^2 \hbar^3 \ln 2}{m_e^5 c^7 (f\tau_{1/2})} \left[(E_\nu - \Delta)^2 - m_e^2 c^4 \right]^{1/2} (E_\nu - \Delta),$$

где $E_\nu - (m_n - m_p)c^2 = E_\nu - \Delta = E_e$ — полная энергия позитрона в реакции (1), так как при энергии антинейтрино, рождающихся в реакторе, энергией отдачи нейтрона в этой реакции можно пренебречь; m_n , m_p — масса нейтрона и протона соответственно; $(f\tau_{1/2})$ — приведенный период полураспада нейтрона [7], в котором фактор фазового пространства для нейтрона $f = 1,7146$ определен с погрешностью 0,01% [15], период полураспада $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$, где $\tau = 887,4 \pm 0,2\%$ с [26].

Теперь можно решить уравнение (3), которое после дискретизации по энергии превратится в систему линейных уравнений. Следствия дискретизации уравнения (3) хорошо видны из анализа табл. 2, откуда следует очевидный вывод, что общий детерминант системы имеет много «нулей» (коэффициенты при λ_i в уравнении (3) равны $\sim 10^{-19}$), и в целом система может оказаться квазивырожденной. Это означает, что мы имеем дело с плохо обусловленной системой линейных уравнений, решение которых может быть неустойчиво к малым изменениям исходных данных. Иначе говоря, задача подобного типа принадлежит к классу некорректных задач и для ее решения в настоящей работе применяется метод регуляризации [27, 28].

Динамическое восстановление изотопного состава ядерного топлива. На примере экспериментов [5, 22, 23] продемонстрируем эффективность решения обратной задачи нейтринной спектроскопии внутриреакторных процессов, описываемой уравнением (3).

Для этого исходное уравнение (3) представим в виде

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x^{(i)},$$

где

$$y = \eta(E_\nu); \quad x^{(i)} = \frac{\gamma \varepsilon_0 N_p}{4\pi R^2} \Delta t \sigma_{\nu p}(E_\nu) \rho_i,$$

или после дискретизации

$$y_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где N — число значений энергии, при которой измеряли спектр.

На этом этапе величины λ_i обычно находят методом наименьших квадратов из условия минимума невязки

$$\chi = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_k^{(i)} - y_k \right)^2,$$

состоящего в равенстве нулю частных производных $\partial \chi / \partial \lambda_i$. Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно λ_i

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N \lambda_i x_k^{(i)} x_k^{(j)} = \sum_{k=1}^N x_k^{(j)} y_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

которую для краткости запишем в виде

$$A\lambda = u, \quad (6)$$

где

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N x_k^{(i)} x_k^{(j)}; \quad u_j = \sum_{k=1}^N x_k^{(j)} y_k.$$

Пусть величины A_{ij} и u_j заданы с погрешностью, которая представляется с помощью евклидовой нормы $\|A_h - A\| \leq h$ и $\|u_\delta - u\| \leq \delta$. Тогда в соответствии с методом регуляризации [26] задача о нахождении нормального решения уравнения (3) или, что то же самое, системы уравнений (6) сводится к нахождению на множестве векторов $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, удовлетворяющих условию $\|A\lambda - u\| = 2(h\|\lambda\| + \delta)$, вектора минимальной нормы. Будем решать эту задачу методом неопределенных множителей Лагранжа, т.е. находить вектор λ^α , минимизирующий сглаживающий функционал:

$$M^\alpha(\lambda, u, A) = A\lambda - u^2 + \alpha\lambda^2, \quad (7)$$

параметр α определять из условия

$$A\lambda^\alpha - u = 2(h\lambda^\alpha + \delta). \quad (8)$$

Пробные величины λ_i являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha\lambda_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} \lambda_j = \sum_{j=1}^n A_{ji} u_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

получающейся из условий минимума функционала (7): $(\partial M^\alpha / \partial \lambda_j^\alpha) = 0, j = 1, \dots, n$.

Подстановка найденной (при заданном начальном приближении параметра регуляризации α) пробной последовательности $\{\lambda_i\}$, полученной из уравнения (9), в условие (8) приведет к уравнению относительно параметра α , решение которого численными методами позволит определить его «истинное» значение. Тогда окончательным и одновременно искомым решением уравнения (3) или, что то же самое, (6) относительно λ_i^α будет решение уравнения (9) при найденном значении параметра α .

В табл. 3 представлены регуляризованные решения $\{\lambda_i^\alpha\}$ системы уравнений (3), характеризующие скорость деления актиноидов ядерного топлива, в табл. 4 приведены нормированные значения этих величин $\{\alpha_i^\alpha\}$:

$$\alpha_i^\alpha = \frac{\lambda_i^\alpha}{\sum_i \lambda_i^\alpha}, \quad (10)$$

что соответствует среднему за время измерения ($\Delta t = 10^5$ с) относительному вкладу делящихся изотопов a , в общее среднее число делений.

Сравнение вклада делящихся изотопов в общее число делений (уравнения (10) и (4)), характеризующего один и тот же эксперимент, но полученного различными способами (см. табл. 4), показывает хорошее согласие.

Т а б л и ц а 3. Регуляризованные решения $\{\lambda_i^a\}$ системы уравнений (6)

$\lambda \cdot 10^{19}$, дел. $\cdot$ с $^{-1}$	[22]	[5]	[23]
λ_5	2,688	2,486	2,457
λ_9	1,223	1,203	1,232
λ_8	0,320	0,296	0,298
λ_1	0,196	0,196	0,195
$\lambda_0 = \Sigma \lambda_i$	4.427 $\pm$ 2,59	4,181 $\pm$ 3,18	4,182 $\pm$ 2,71

Т а б л и ц а 4. Относительный вклад делящихся изотопов a_i в общее число делений λ_0

a_i	Настоящая работа	[22]	Настоящая работа	[5]	Настоящая работа	[23]
a_5	0,607	0,606	0,597	0,593	0,588	0,586
a_9	0,276	0,274	0,288	0,286	0,295	0,292
a_8	0,072	0,074	0,070	0,075	0,071	0,075
a_1	0,044	0,046	0,047	0,047	0,047	0,047
W , МВт	1452,7	1452	1374,6	1375	1375,6	1375

Погрешность регуляризованного решения. Следует сразу отметить, что устойчивый метод решения некорректных задач сам по себе еще не гарантирует возможность получения оценки погрешности или скорости сходимости приближенного решения. Он гарантирует только стремление приближенного решения, если оно существует, к асимптотически точному [27], однако ничего не известно о том, как близко или далеко оно находится от точного. Ситуация существенно меняется, когда известна дополнительная информация относительно неизвестного точного решения. В частности, если эта дополнительная информация касается структуры множества, которому принадлежит точное решение, то в этом случае возможны эффективные способы нахождения погрешности приближенного решения.

Обсудим точность устойчивого приближения к решению или, точнее говоря, к нормальному решению (нормальному псевдорешению) системы (3) или (6). Метод регуляризации, используемый для решения плохо обусловленных систем линейных уравнений, имеет одну особенность. Суть ее определяется следующей важной теоремой [29]: при поиске нормального решения λ совместной системы типа (6) методом регуляризации с использованием сглаживающего функционала (7) существует такой выбор параметра регуляризации $\alpha = \alpha(h)$, что при $0 \leq h \leq h_0 = \text{const}$ и любом $\sigma \geq 0$ справедлива оценка погрешности приближенного решения:

$$\|\lambda^{\alpha(h)} - \lambda\| \leq \frac{\|\bar{A}^+\| [\sigma + h(1 + \sqrt{2})\|\lambda\|]}{1 - h\|\bar{A}^+\|} = O(h + \sigma), \quad (11)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Эта оценка точна по порядку входящих в нее значений погрешностей σ , h и псевдобратной матрицы $\|\bar{A}^+\|$. Таким образом, особенность заключается в том, что приближенное решение, получаемое с помощью этого ме-

тогда по приближенным данным задачи типа уравнения (6), имеет оптимальный порядок точности (1) только в том случае, если система разрешима (более подробно см. в работе [30]). Если система несовместна, но ищется ее нормальное псевдорешение, то метод регуляризации, вообще говоря, может и не дать оптимального порядка точности. Следует при этом отметить, что судить о разрешимости точной системы по ее приближенным данным в общем случае не представляется возможным [30].

В нашем случае это не так. Система уравнений заведомо разрешима уже только потому, что априори известно существование точного решения, которое в обобщенном виде эквивалентно номинальной тепловой мощности реактора (см. табл. 4), которую можно оценить по формуле (4):

$$W = \sum_i \lambda_i^j E_f = \lambda \sum_i \alpha_i^j E_f.$$

На практике мощность обычно определяется независимым способом, например, тепловым методом, имеющим примерно 2%-ную погрешность [22]. Полученные приближенные решения $\{\lambda_i^\alpha\}$ системы уравнений (6) хорошо согласуются с номинальной мощностью ВВЭР-440 Ровенской АЭС в экспериментах [5, 22, 23] в пределах ошибки, не превышающей 0,07% (см. табл. 4). При этом общая погрешность приближенного решения с учетом погрешности теплового метода определения мощности реактора превышает 2—3%. Покажем это с помощью уравнения (11), которое в силу разрешимости системы (6) можно использовать для оценки погрешности приближенных решений в экспериментах [5, 22, 23].

Так как для решения системы (3) в энергетическом спектре по месту регистрации $\eta(E_\nu)$ значения брали при энергии 2,5, 3, 3,5, 4,5 МэВ, то относительная погрешность экспериментальных данных составила 2,71% [22], 3,18% [5], 2,59% [23]. Погрешность оператора $\|A_h - A\| \leq h$ в уравнении (3) определяется в основном средней погрешностью энергетического спектра электронных антинейтрино $\rho(E_\nu) = \Sigma(\alpha_i \rho_i)$, испускаемого смесью продуктов деления всех компонентов ядерного топлива, при этом относительная погрешность составляет 5,7% (см. табл. 2).

Однако следует учесть, что погрешность экспериментальных данных σ в абсолютных величинах намного превышает среднюю h в уравнении (3), т.е. $\sigma \gg h$. Отсюда в нашем случае оптимальный порядок точности (11) определяется в основном погрешностью экспериментальных данных обратной задачи (уравнение (6)):

$$\|\lambda^{\alpha(h)} - \lambda\| = \|\Delta\lambda\| \leq O(\sigma). \quad (12)$$

Это с учетом полученной средней погрешности экспериментальных данных в работах [5, 22, 23] и допущения о равномерном распределении погрешностей по компонентам регуляризованного решения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ позволяет оценить точность погрешности каждого компонента приближенного регуляризованного решения:

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_i = \frac{1}{2} \|\Delta\lambda\| = \begin{cases} O(1,355\%) [22]; \\ O(1,590\%) [5]; \\ O(1,295\%) [23]. \end{cases} \quad (13)$$

Скорость деления λ_0 , представляющая собой сумму компонентов регуляризованного решения $\{\lambda_i^\alpha\}$ системы уравнений (6) для каждого случая [5, 22, 23] соответственно (см. табл. 3), позволяет оценить суммарное приближенное решение и его точность:

$$\lambda_0 = \sum_i \lambda_i^\alpha \pm \|\Delta\lambda\| = \begin{cases} 4,427 \cdot 10^{19} \pm O(2,71\%) [22]; \\ 4,181 \cdot 10^{19} \pm O(3,18\%) [5]; \\ 4,182 \cdot 10^{19} \pm O(2,59\%) [23]. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь возникает естественный вопрос о том, как от оценки оптимального порядка точности приближенного решения (14) перейти непосредственно к самой оценке точности этого решения. Общий план осуществления такой процедуры ясен: надо на основе неких модельных представлений о решении использовать дополнительную информацию, позволяющую сузить множество решений, которому принадлежит точное решение, и тем самым получить обоснованную оценку погрешности выделенного множества решений. Объясним, как это делалось в данном случае.

Известно, что вследствие выгорания ^{235}U и накопления плутония спектр антинейтрино ядерного реактора и, как следствие, сечение реакции (1) изменяются во времени. Как отмечается в работе [5], в результате выгорания вклад изотопов α_i в течение кампании меняется заметным образом. При этом изменения в спектре могут достигать 10%, полное сечение реакции (1) за одну кампанию изменяется, как это было показано экспериментально в работе [31], почти на 6%, что сравнимо или даже превосходит, например, погрешность результатов, приведенных в выражении (14). На практике вклад изотопов α_i обычно рассчитывается по программам, опирающимся на радиохимический анализ состава отработавшего топлива. При этом погрешность составляет, например, для ВВЭР-440 примерно 5% [31]. Это означает, что если вклад изотопов α_i , используемый в прямой задаче (уравнение (2)) и получаемый в обратной (уравнение (3)) при всех прочих равных условиях близок (см. табл. 4), то это, в свою очередь, эквивалентно близости оценок оптимального порядка точности решения (12)—(14) и погрешности вклада изотопов α_i , полученной с помощью радиохимического анализа отработавшего топлива [31]. Другими словами, оценку точности погрешности каждого из компонентов приближенного регуляризованного решения уравнения (3) теперь можно записать в приемлемой для расчетов форме:

$$\|\lambda^{\alpha(h)} - \lambda\| = \|\Delta\lambda\| \leq O(\sigma) \cong 2\sigma, \quad (15)$$

которая проясняет абстрактный смысл выражений (12)—(14). Например, выражение (14) при условии (15) позволяет оценить точность погрешности относительного вклада изотопов α_i , т.е. каждого компонента приближенного регуляризованного решения (14) балансового уравнения нейтринной спектроскопии (3) в экспериментах [22, 5, 23]:

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \rightarrow \frac{\Delta\alpha_i}{\alpha_i} \cong \sqrt{\left(\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0}\right)^2} = \begin{cases} 5,6\% [22]; \\ 6,6\% [5]; \\ 5,3\% [23], \end{cases} \quad (16)$$

что согласуется с данными радиохимического анализа отработавшего топлива [31]. Самое важное то, что такой переход от оценки оптимального порядка точности приближенного решения (14) к оценке точности этого решения означает, что условие (15), полученное один раз, остается справедливым для всех аналогичных экспериментов как при улучшении статистики измерений за счет увеличения, например, объема выборки, так и наоборот.

И, наконец, для полноты изложения отметим, что существует метод, который позволяет избежать трудностей, связанных с проблемой совместности или несовместности системы уравнений типа (10). Оказывается, что теория обобщенного принципа невязки для решения нелинейных некорректных задач [30] дает возможность построить метод решения плохо обусловленных систем линейных уравнений с приближенными данными, точность которого уже не зависит от разрешимости или неразрешимости точной системы. Этот метод — метод псевдообратной матрицы [30] будет применен нами в последующих работах для анализа и выбора устойчивой и надежной процедуры определения точности приближенного решения обратной задачи нейтринной диагностики внутриреакторных процессов с учетом статистики рождения и регистрации реакторных антинейтрино [32—34].

Выводы. Предложен новый метод восстановления ядерной плотности каждого компонента изотопного состава ядерного топлива и соответственно динамики изменения непосредственно в процессе работы реактора. Очевидно, что нейтринный метод обладает всеми необходимыми свойствами независимого и абсолютного метода, чрезвычайно актуального для дистанционной диагностики важнейших характеристик активной зоны реактора в режиме on-line.

Нам приятно поблагодарить Л.А. Микаэляна за полезные дискуссии, интерес и поддержку работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nezzrick F., Reines F. Fission-antineutrino interaction with protons. — *Phys. Rev.*, 1966, v. 142, № 4, p. 852—870.
2. Vogel P., Schenter G., Mann F., Schenter R. Reactor antineutrino and their application to antineutrino-induced reactions II. — *Ibid.*, 1981, v. C24, № 4, p. 1543—1553.
3. Klapdor H., Metzinger J. Calculation of the antineutrino spectrum from thermal fission of U^{235} . — *Phys. Lett.*, 1982, v. 48, № 3, p. 127—131.
4. Копейкин В.И. Бета-спектры от смеси продуктов деления ядер (расчет и анализ корреляций). — *Ядерная физика*, 1980, т. 32, вып. 1, с. 62—66.
5. Климов Ю.В., Копейкин В.И., Микаэлян Л.А. и др. Измерение спектра электронных антинейтрино ядерного реактора. — Там же, 1990, т. 52, вып. 6(12), с. 1579—1587.
6. Кетов С.Н., Мачулин И.Н., Микаэлян Л.А. и др. Эксперимент в новой постановке по поиску нейтринных осцилляций на реакторе. — *Письма в ЖЭТФ*, 1992, т. 55, с. 543—546.
7. Рубцов П.М., Ружанский П.А., Петров В.М. и др. Спектр и сечение взаимодействия антинейтрино, излучаемых ядерным реактором. — *Ядерная физика*, 1987, т. 46, № 4(10), с. 1028—1035.
8. Алексанкин В.Г., Родичев С.В., Рубцов П.М. и др. Бета- и антинейтринные излучения ядер. Справочник. Под ред. П.М. Рубцова. М.: Энергоатомиздат, 1989. 312 с.
9. Боровой А.А. Нейтринные эксперименты на реакторах. — *ЭЧАЯ*, 1980, т. 11, с. 90—108.
10. Vogel F., Engel J. Neutrino electromagnetic form factors. — *Phys. Rev.*, 1989, v. D39, p. 3378—3383.

11. Schreckenbach K., Colvin G., Gellety W., Feilitzsch F. Determination of the antineutrino spectrum from U^{235} thermal neutron fission products up to 9.5 MeV. — Phys. Lett., 1985, v. B160, № 4—5, p. 325—330.
12. Hahn A.A., Feilitzsch F., Schreckenbach K. e.a. Antineutrino spectra from Pu^{239} , Pu^{241} thermal neutron fission products. — Ibid., 1989, v. B218, p. 365—368.
13. Frampton P., Vogel P. Massive neutrinos. — Phys. Rep., 1982, v. 82, p. 339—349.
14. Vogel P. Analysis of the antineutrino capture on protons. — Phys. Rev., 1984, v. D29, p. 1918—1930.
15. Фаянс С.А. Радиационные поправки и эффекты отдачи в реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$ при низких энергиях. — Ядерная физика, 1985, т. 42, с. 929—936.
16. Wilkinson D. Analysis of neutron β decay. — Nucl. Phys., 1982, v. A377, p. 474—504.
17. Русов В.Д., Высоцкий В.И., Зеленцова Т.Н. Нейтринная диагностика внутриреакторных процессов и топливосодержащих масс. — Ядерная и рад. безопасность, 1998, т. 1, вып. 1, с. 66—92.
18. Mikaelyan L.A. Neutrino laboratory at the atomic plant. — In: Proc. Intern. Conf. «Neutrino-77». М.: Nauka, 1978, v. 2, p. 383—387.
19. Боровой А.А., Микаэлян Л.А. Возможности практического использования нейтрино. — Атомная энергия, 1978, т. 44, вып. 6, с. 508—515.
20. Коровкин В.А., Коданев С.А., Панащенко Н.С. и др. Измерения энерговыработки энергетического реактора методом регистрации нейтрино. — Там же, 1988, т. 65, вып. 3, с. 169—173.
21. Климов Ю.В., Копейкин В.И., Микаэлян Л.А. и др. Дистанционное измерение мощности и энерговыработки реактора нейтринным методом. — Там же, 1994, т. 76, вып. 2, с. 130—137.
22. Афонин А.И., Кетов С.Н., Копейкин В.И. и др. Исследование реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ на ядерном реакторе. — ЖЭТФ, 1988, т. 94, вып. 1, с. 1—16.
23. Копейкин В.И., Микаэлян Л.А., Синев В.В. Спектр электронных антинейтрино ядерного реактора. — Ядерная физика, 1997, т. 60, с. 230—234.
24. Боровой А.А., Копейкин В.И., Микаэлян Л.А., Толоконников С.В. О связи между спектрами реакторных $\bar{\nu}_e$ и β -электронов. — Там же, 1982, т. 36, вып. 2(8), с. 400—402.
25. Feilitzsch F., Hahn A., Schreckenbach K. Experimental beta spectra from Pu^{239} and U^{235} thermal neutron fission products and their correlated antineutrino spectra. — Phys. Lett., 1982, v. B118, № 1—3, p. 162—166.
26. Выродов В.Н., Декле И., де Керрет Э. и др. Прецизионное измерение сечения реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ на реакторе в Буже (Франция). — Письма в ЖЭТФ, 1995, т. 61, вып. 3, с. 161—167.
27. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
28. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Леонов А.С. и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М.: Наука, 1983. 183 с.
29. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986. 182 с.
30. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.
31. Климов Ю.В., Копейкин В.И., Лабзов А.А. и др. Измерение вариаций сечения реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ в потоке $\bar{\nu}_e$ от реактора. — Ядерная физика, 1990, т. 51, с. 401—405.
32. Русов В.Д., Бабинова Ю.Ф., Ягола А.Г. Восстановление изображений в электронно-микроскопической автордиографии поверхности. М.: Энергоатомиздат, 1991. 216 с.
33. Русов В.Д., Зеленцова Т.М., Тарасов В.О., Шаабан И. Статистичні властивості електронних антинейтрино. — Доповіді НАН України, 2002, № 6, с. 79—83.
34. Rusov V.D., Zelentsova T.N., Tarasov V.A., Shaaban I. Precision method for the determination of neutrino mixing angle. — Problems of Atomic Science and Technology. Ser. General and Nuclear Phys., 2001, № 6(1), p. 157—160.