

# ЗНАКОПЕРЕМЕННАЯ ФОКУСИРОВКА В ЛИНЕЙНЫХ УСКОРИТЕЛЯХ\*)

А. Д. Власов

Излагается линейная теория знакопеременной («сильной») фокусировки в линейных ионных ускорителях.

В линейных ускорителях протонов или других тяжелых частиц, как известно, радиальные колебания не могут быть устойчивыми одновременно с устойчивостью продольного (фазового) движения частиц, если не приняты специальные меры для фокусировки пучка.

Такое средство фокусировки, как продольное магнитное поле, применительно к тяжелым частицам требует индукций в десятки тысяч гаусс. Фокусировка сетками или фольгами связана со значительными потерями частиц, а во многих случаях и невозможна из-за перегрева сеток или фольг.

Определенные преимущества по сравнению с другими известными способами имеет знакопеременная («сильная») фокусировка, основанная на периодическом чередовании фокусирующих и дефокусирующих участков ускорителя. В линейных ионных ускорителях такое чередование позволяет использовать для фокусировки действие как поперечных магнитных или электростатических полей (линзовая фокусировка), так и самого ускоряющего высокочастотного поля (фазопеременная фокусировка).

Линзовая фокусировка осуществляется посредством четырехполюсных магнитных или электростатических линз с гиперболической формой поперечного сечения полюсов

(электродов), обеспечивающей постоянство градиентов поля

$$\frac{\partial B_y}{\partial X} = \frac{\partial B_x}{\partial Y}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial X} = -\frac{\partial E_y}{\partial Y}$$

вдоль осей  $X$  и  $Y$  (мы применяем прямоугольную систему координат, ось  $Z$  которой совмещена с осью ускорителя). Линза, фокусирующая в плоскости  $XZ$ , дефокусирует в плоскости  $YZ$ , и наоборот.

При фазопеременной фокусировке используется периодическое изменение знака равновесной фазы.

Знакопеременная фокусировка имеет свои недостатки, к числу которых относится ограниченность допустимых ускоряющих полей и токов пучка, а также жесткие допуски на размеры и рабочие параметры ускоряющей фокусирующей системы.

Теория знакопеременной фокусировки в линейных ускорителях после опубликования статей Куранта, Ливингстона и Снайдера [1] и Блюйта [2] интенсивно развивалась. Из зарубежных работ наиболее значительны статьи Тенга [3], Смита и Глюкстерна [4] и ранний отчет Белла [5]. Имеется также ряд неопубликованных отечественных исследований.

Настоящая статья представляет собой краткое изложение работ, выполненных автором в 1953 — 1955 гг. [6], [7]. Такие вопросы, как фазопеременная фокусировка, до-

\*) Доложено на Всесоюзной конференции по физике частиц высоких энергий 18 мая 1956 г

пуски, дефокусирующее действие объемного заряда и др., в статью не включены и должны быть изложены отдельно.

### 1. Исходные уравнения. Размах колебаний внутри структурного периода

Радиальное движение частиц с массой  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , скоростью  $v = \beta c$  и фазой  $\varphi$  описывается в плоскости  $XZ$ , в линейном приближении, уравнением

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dX}{dt} \right) = F(Z, \varphi) \cdot X.$$

Градиент радиальных сил складывается из градиента, создаваемого линзами, и градиента дефокусирующих сил ускоряющего поля

$$F(Z, \varphi) = evB' \cdot f + \frac{\pi e E_m (1-\beta^2)}{\beta \lambda} \sin \varphi \cdot g.$$

Здесь  $e$ —заряд частицы;  $E_m$ —амплитуда ускоряющей волны;  $\lambda$ —длина волны;  $g$ —функция продольной координаты, в среднем равная единице;  $f$ —знакопеременная функция продольной координаты;  $B'$ —расчетное значение градиента магнитной индукции в линзах; при фокусировке электростатическими линзами  $vB'$  заменяется на  $E'$ .

Предполагая, что скорость  $v$  и структурный период  $2L$  изменяются медленно, и вводя безразмерные координаты  $x, s$ ,

$$X = \sqrt{(mvL)_0} \sqrt{\frac{L}{mv}} \cdot x, \quad dZ = L ds, \quad (1)$$

приходим к уравнению\*)

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - [\Lambda^2 \cdot f(s) + A \sin \varphi \cdot g(s)] \cdot x = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \frac{\pi e E_m (1-\beta^2)^2 L^2}{m_0 c^2 \beta \lambda^3}, \quad \Lambda^2 = \frac{e B' L^2}{mv}. \quad (3)$$

Индексом «0» отмечены начальные значения величин.

«Кинематический» множитель  $\sqrt{\frac{L}{mv}}$  (1) в случае ускорителя с трубками дрейфа ( $L \propto v$ ) в нерелятивистском приближении постоянен.

\*) Скачкообразно изменяющаяся величина  $L$  заменяется при этом преобразованием мало отличающейся от нее функцией, непрерывной вместе со своей производной.

В случае ускорителя из одинаковых однозачерных резонаторов, а также для свободных колебаний в циклическом ускорителе ( $L = \text{const}$ ) этот множитель обратно пропорционален квадратному корню из импульса  $mv$ .

Вследствие периодичности строения ускоряюще-фокусирующей системы коэффициент в уравнении (2), как и функции  $f, g, F(Z, \varphi)$ , является приблизительно периодическим.

Значения  $x, x'$  в конце и начале структурного периода связаны линейными соотношениями:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ x'_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_H \\ x'_H \end{bmatrix}.$$

В силу отсутствия первой производной в уравнении (2) детерминанты рассматриваемых здесь четырех элементарных матриц равны единице. Обозначим

$$\cos \mu = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, \quad \nu = \frac{a_{12}}{\sin \mu}, \quad \xi = \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}}.$$

Описываемое уравнением (2) движение устойчиво при условии  $-1 < \cos \mu < 1$  и может быть представлено в пределах структурного периода  $2n \leq s \leq 2n+2$  (а в случае периодичности коэффициента при  $x$  и для любых  $s$ ) в виде

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{\frac{i\mu s}{2}} \varphi_1(s) + C_2 e^{-\frac{i\mu s}{2}} \varphi_2(s) = \\ &= \sqrt{4C_1 C_2 \varphi_1(s) \varphi_2(s)} \sin \left[ \frac{\mu s}{2} + \Phi(s) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \Phi$ —периодические функции с периодом 2 и  $n$ —целое число (номер периода, если начинать нумерацию с 0). Функции

$w_1(s) = e^{\frac{i\mu s}{2}} \varphi_1(s)$ ,  $w_2(s) = e^{-\frac{i\mu s}{2}} \varphi_2(s)$  удовлетворяют начальным условиям  $w_{1,2}(2n) = 1$ ,

$w'_{1,2}(2n) = \xi \pm \frac{i}{\nu}$ , причем  $w_1(s) w'_2(s) - w'_1(s) \times$

$\times w_2(s) = \text{const} = \frac{2}{i\nu}$ . Определяя постоянные  $C_1, C_2$  через  $x, x'$ , производя аналогичные операции для плоскости  $YZ$  и отмечая относящиеся к ней величины чертой над буквой, получаем:

$$\left. \begin{aligned} 4C_1 C_2 &= \\ &= \sqrt{2} [\bar{w}'_1 w'_2 \cdot x^2 + \bar{w}_1 w_2 \cdot (x')^2 - (\bar{w}_1 w_2)' x x'], \\ 4\bar{C}_1 \bar{C}_2 &= \\ &= \sqrt{2} [\bar{w}'_1 \bar{w}'_2 \cdot y^2 + \bar{w}_1 \bar{w}_2 \cdot (y')^2 - (\bar{w}_1 \bar{w}_2)' y y']. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Как можно показать, произведения  $w_1 w_2 = \varphi_1 \varphi_2$ ,  $\bar{w}_1 \bar{w}_2 = \bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2$  положительны и для рассматриваемого уравнения (2) имеют максимумы приблизительно в середине фокусирующих участков и минимумы—в середине дефокусирующих участков. Коэффициенты  $(w_1 w_2)'$ ,  $(\bar{w}_1 \bar{w}_2)'$  обращаются в этих точках в нуль. Произведения  $w_1' w_2'$ ,  $\bar{w}_1' \bar{w}_2'$  положительны и минимальны приблизительно в середине как фокусирующих, так и дефокусирующих участков. Поэтому целесообразно выбрать место инжекции в середине участка, скажем, фокусирующего в плоскости XZ. Из шести коэффициентов пять становятся минимальными, а единственный максимальный  $(w_1 w_2)$  лишь незначительно больше своего значения на краю участка \*).

Совместим начало отсчета с серединой участка, фокусирующего в плоскости XZ. Матрица  $[a_{ij}]$  становится при этом приблизительно симметричной ( $a_{11} \approx a_{22}$ ).

В дальнейшем будем считать, что период включает один фокусирующий и один дефокусирующий участки и состоит из двух взаимно симметричных половин. Структуры в плоскостях XZ, YZ отличаются при этом лишь сдвигом на полпериода,  $a_{11} = a_{22} = \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22}$ ,

$$(\varphi_1 \varphi_2)_{\max} = \varphi_1(2n) \varphi_2(2n) = 1,$$

$$(\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2)_{\max} = \bar{\varphi}_1(2n+1) \bar{\varphi}_2(2n+1) = \gamma^2.$$

Величина  $\gamma^2$  равна отношению вронскианов

$$\gamma^2 = \frac{v}{\bar{v}} = \frac{a_{12}}{\bar{a}_{12}} = \frac{b_{22}}{b_{11}}.$$

Здесь  $b_{ij}$ —элементы матрицы первого полупериода. Из (4) и (5) вытекает

$$\left. \begin{aligned} x_{\max}^2 &= [x(2n)]_{\max}^2 = [x(2n)]^2 + [vx'(2n)]^2, \\ y_{\max}^2 &= \gamma^2 [y(2n)]_{\max}^2 = \\ &= [\gamma y(2n)]^2 + \left[ \frac{\gamma y'(2n)}{\gamma} \right]^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Отсюда при  $n=0$ , если нежелательно различать требования для плоскостей XZ и YZ, получаем:

$$R_0^2 \geq (\gamma r)_0^2 + (vL\alpha)_0^2,$$

где  $2R$ —диаметр апертуры;  $2r$  и  $2\alpha$ —диаметр и угол расхождения инжектируемого пучка.

\*) На целесообразность укорочения первой линзы указал, исходя из качественных соображений, И. Л. Зельманов в 1953 г.

## 2. Область устойчивости. Возможности знакопеременной фокусировки

Рассмотрим случай простейшего строения периода—случай идеализированного ускорителя с незатухающими бегущими волнами и прямоугольной характеристикой градиента в линзах ( $f = \pm 1$ ,  $g = 1$ ,  $\varphi = \text{const}$ ). Уравнение (2) сводится к

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + [\pm \Lambda^2 - A \sin \varphi] x = 0. \quad (7)$$

Матрицы фокусирующего и дефокусирующего полупериодов имеют вид

$$\begin{bmatrix} \cos \phi_1 & \frac{1}{\phi_1} \sin \phi_1 \\ -\phi_1 \sin \phi_1 & \cos \phi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ch } \phi_2 & \frac{1}{\phi_2} \text{sh } \phi_2 \\ \phi_2 \text{sh } \phi_2 & \text{ch } \phi_2 \end{bmatrix},$$

где  $\phi_{1,2}^2 = \Lambda^2 \mp A \sin \varphi$ . Расчет  $a_{ij}$ ,  $v$ ,  $\gamma$  в этом случае сравнительно прост:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = \cos \mu = \cos \phi_1 \text{ch } \phi_2 + \\ &\quad + \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{2\phi_1 \phi_2} \sin \phi_1 \text{sh } \phi_2, \\ a_{12} &= \frac{1}{\phi_1} \left[ \sin \phi_1 \text{ch } \phi_2 - \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{2\phi_1 \phi_2} \cos \phi_1 \text{sh } \phi_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2^2 + \phi_1^2}{2\phi_1 \phi_2} \text{sh } \phi_2 \right], \\ a_{21} &= \phi_1 \left[ -\sin \phi_1 \text{ch } \phi_2 + \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{2\phi_1 \phi_2} \cos \phi_1 \text{sh } \phi_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_2^2 + \phi_1^2}{2\phi_1 \phi_2} \text{sh } \phi_2 \right]. \end{aligned}$$

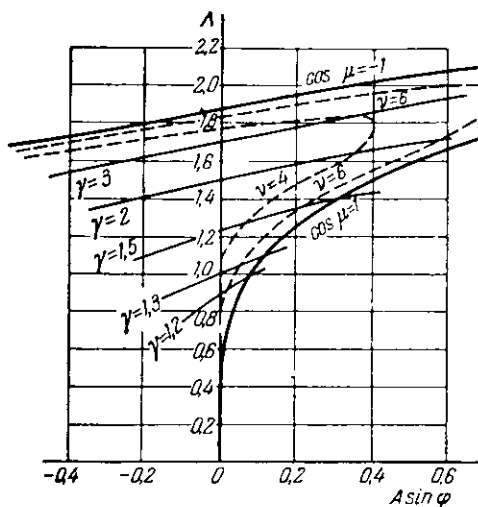
Границам устойчивости  $\cos \mu = \pm 1$  соответствуют уравнения  $\phi_1 \text{tg } \frac{\phi_1}{2} = \phi_2 (\text{th } \frac{\phi_2}{2})^{\pm 1}$ .

Область устойчивости в координатах  $\phi_1^2$ ,  $-\phi_1^2$  приведена на рис. 2 в статье [1] (область между двумя кривыми, пересекающимися правый край чертежа). Применительно к линейным ускорителям более удобно строить область устойчивости в координатах  $A \sin \varphi = \frac{\phi_2^2 - \phi_1^2}{2}$ ,  $\Lambda = \sqrt{\frac{\phi_2^2 + \phi_1^2}{2}}$  (см. рисунок). На ту же плоскость целесообразно нанести семейства кривых  $v = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ .

Из-за увеличения размаха колебаний с ростом  $v$  и  $\gamma$ , а также ввиду нежелательности слишком жестких допусков на градиент в линзах, амплитуду ускоряющего поля и фазу частицы (которая может в процессе фазовых колебаний изменяться в широких пределах),

верхнюю часть области устойчивости ( $\Lambda > 1,7$ ) использовать для работы практически нельзя. Это накладывает ограничение на величину  $A$  (3), т. е. на величину ускоряющего поля при данных  $\beta$ ,  $L$  и  $\lambda$ . Из-за снижения допустимых  $A$  с уменьшением  $\Lambda$  работу следует вести в средней части области устойчивости ( $\Lambda = 1,4 \div 1,6$ ).

Уменьшение периода чередования знака линз позволяет увеличить ускоряющее поле, но требует в то же время повышения градиента в линзах. В ускорителе с трубками дрейфа ( $L \propto \beta$ ,  $\beta^2 \ll 1$ ) допустимое ускоряющее



Область устойчивости колебаний при знакопеременной фокусировке.

поле пропорционально  $\beta$ , градиент в линзах  $B' \propto \frac{1}{\beta}$ ,  $E' = \text{const}$  (при  $\Lambda = \text{const}$ ). Например, для ускорителя протонов при энергии  $10 \text{ МэВ}$  ( $\beta = 0,146$ ),  $\Lambda = 1,6$ ,  $A_{\text{max}} = 0,3$ ,  $\lambda = 2 \text{ м}$  и  $L = 2\beta\lambda$  получаем  $B' = 340 \text{ гс/см}$  ( $E' = 15 \text{ кВ/см}^2$ ) и  $E_m \leq 1,6 \text{ мВ/м}$  ( $\frac{E_m}{\beta} \leq 11 \text{ мВ/м}$ ). При меньших энергиях эффективность знакопеременной фокусировки снижается настолько, что становится более целесообразно применять другие методы (фокусировку сетками).

Переход от ионов с некоторым  $\frac{m_0}{e}$  к ионам с другим  $\frac{m_0}{e}$ , осуществляемый без перестройки ускоряющей системы (т. е. при сохранении прежних  $\beta$ ), требует для сохранения прежней равновесной фазы  $\varphi_s$  и прежнего  $\Lambda$  изменения ускоряющего поля и градиента в линзах

пропорционально  $\frac{m_0}{e}$ . При этом  $A$  остается неизменным. Сохранить прежние значения  $E_m$  и  $B'$  ( $E'$ ) можно лишь в случаях, когда связанные с этим изменения  $\varphi_s$ ,  $A$ ,  $\Lambda$  не выходят из допустимых пределов.

Если при переходе к другим ионам сохраняют прежние  $E_m$  и  $\varphi_s$ , то должно измениться  $\beta$ , следовательно, требуется перестройка ускоряющей системы, причем изменяются  $A$  и  $\Lambda$  или  $B'$  ( $E'$ ).

### 3. Расчет матриц сложных периодов

При сложном строении периода во многих случаях можно свести расчет к простейшему случаю, описанному выше. Изложим метод упрощенного расчета на примере ускорителя с трубками дрейфа и периодом, занимающим  $2N$  трубок (за  $N$  фокусирующими линзами следуют  $N$  дефокусирующих линз;  $L = N\beta\lambda$ ).

Матрицы фокусирующей линзы, дефокусирующей линзы и зазора между линзами (включающего ускоряющий зазор) при обычных упрощениях имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} & \frac{1}{\Lambda} \sin \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} \\ -\Lambda \sin \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} & \cos \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \text{ch} \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} & \frac{1}{\Lambda} \text{sh} \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} \\ \Lambda \text{sh} \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} & \text{ch} \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{2N^2} & \left(1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{4N^2}\right) \frac{\alpha}{N} \\ \frac{A \sin \varphi}{N} & 1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{2N^2} \end{bmatrix},$$

где  $\alpha$  — доля периода, приходящаяся на зазоры между линзами.

Разобьем период на элементарные ячейки, каждая из которых состоит из второй половины зазора между линзами, линзы и первой половины следующего зазора. Матрицы фокусирующей и дефокусирующей элементарных ячеек напомним в виде

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{\psi_1}{N} & \frac{1}{k_1} \sin \frac{\psi_1}{N} \\ -k_1 \sin \frac{\psi_1}{N} & \cos \frac{\psi_1}{N} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{ch} \frac{\psi_2}{N} & \frac{1}{k_2} \text{sh} \frac{\psi_2}{N} \\ k_2 \text{sh} \frac{\psi_2}{N} & \text{ch} \frac{\psi_2}{N} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\psi_1}{N} &= \left( 1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{2N^2} \right) \cos \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} + \\ &+ \left[ \frac{A \sin \varphi}{2\Lambda N} - \left( 1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{4N^2} \right) \frac{\alpha \Lambda}{2N} \right] \sin \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N}, \\ \operatorname{ch} \frac{\psi_2}{N} &= \left( 1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{2N^2} \right) \operatorname{ch} \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N} + \\ &+ \left[ \frac{A \sin \varphi}{2\Lambda N} + \left( 1 + \frac{\alpha A \sin \varphi}{4N^2} \right) \frac{\alpha \Lambda}{2N} \right] \operatorname{sh} \frac{\Lambda(1-\alpha)}{N}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Матрицы (8) можно истолковать как матрицы более простого периода, описываемого уравнением (7). Длины фокусирующего и дефокусирующего эквивалентных полупериодов при этом составляют  $\frac{\psi_1}{k_1}$ ,  $\frac{\psi_2}{k_2}$  и отличаются от единицы. Строго говоря, требуется дальнейшее преобразование эквивалентного периода к простейшему виду. Однако практически различие  $\frac{\psi_1}{k_1}$  и  $\frac{\psi_2}{k_2}$  не превышает нескольких процентов, а их сумма еще менее отличается от двух. Поэтому можно непосредственно пользоваться всеми результатами раздела 2 (см. рисунок), вычисляя  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  из формулы (9) и полагая

$$\Lambda_{\text{эвб}} \approx \sqrt{\frac{\psi_2^2 + \psi_1^2}{2}},$$

$$(\Lambda \sin \varphi)_{\text{эвб}} \approx \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{2}.$$

Точность такого расчета возрастает с увеличением  $N$ . Если учесть малость коэффициентов при синусах в равенствах (9) и малое отличие коэффициентов при косинусах от единицы, можно получить простые и дающие хорошее приближение формулы:

$$\Lambda_{\text{эвб}} \approx \Lambda \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$A_{\text{эвб}} \approx A \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

#### 4. Изменение параметров от периода к периоду. Влияние фазовых колебаний

Вследствие роста энергии частицы, изменения параметров ускоряюще-фокусирующей системы вдоль ускорителя и колебаний фазы частицы матрицы структурных периодов также изменяются от периода к периоду. Матрицу периода, в общем случае несим-

метричную, можно представить в виде произведения

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \mu & \nu \sin \mu \\ -\frac{1}{\nu} \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\xi & 1 \end{bmatrix}$$

и истолковать как матрицу некоторого эквивалентного участка, описываемого уравнением

$$\frac{d^2 U}{dQ^2} + k^2 U = 0 \quad (10)$$

и имеющего длину  $\Delta Q = \mu \nu$ , причем в пределах участка  $k^2 = \frac{1}{\nu^2} = \text{const}$ , в начале и конце участка  $k^2 = \pm \xi \cdot \delta(Q_{\text{и.р.}})$ . Градиент  $k^2 = \frac{1}{\nu^2}$  характеризует фокусирующее действие периода, а пара  $\delta$ -функций — асимметрию периода. При  $a_{11} = a_{22}$  эта пара исчезает.

Значения  $U$ ,  $U'$  на границах таких эквивалентных участков равны значениям  $x$ ,  $x'$  на границах соответствующих периодов. Последовательность эквивалентных участков образует систему, эквивалентную ускоряюще-фокусирующей системе ускорителя.

В случае неизменности матриц ( $a_{ij} = \text{const}$ )  $\delta$ -функции на стыках эквивалентных участков взаимно уничтожаются, и в уравнении (10)  $k^2 = \frac{1}{\nu^2} = \text{const}$ . Следовательно, амплитуда  $[x(2n)]_{\text{max}} = U_{\text{max}}$  постоянна.

При медленном изменении матриц от периода к периоду  $\delta$ -функции на стыках участков взаимно уничтожаются почти полностью, и  $k^2 \approx \frac{1}{\nu^2}$ . Поэтому

$$[x(2n)]_{\text{max}} = U_{\text{max}} \propto \sqrt{\nu},$$

если нет параметрического резонанса между изменениями  $a_{ij}$  и радиальными колебаниями \*).

В случае произвольно быстрого изменения матриц положим  $\nu = \nu_{\text{ср}} \cdot \nu_{\sim}$ , где  $\nu_{\text{ср}}$  — медленно изменяющаяся «средняя» составляющая и  $\nu_{\sim}$  — множитель, скачкообразно колеблющийся около единицы. Произведя преобразование переменных  $U = \sqrt{\nu_{\text{ср}}} u$ ,

\*) Этот результат, но без учета параметрических резонансов, был получен другим способом Э. Л. Бурштейном и Л. С. Соловьевым [8].

$dQ = v_{cp} dq$ , аналогичное преобразованию (1), приходим к уравнению

$$\frac{d^2 u}{dq^2} + k^2 v_{cp}^2 \cdot u = 0. \quad (11)$$

Пусть матрицы симметричны; тогда  $k^2 v_{cp}^2 = \frac{1}{v_{\sim}^2}$ . Квадрат амплитуды  $u_{\max}^2 = u^2 + (u')^2 v_{\sim}^2$  в момент изменения  $v_{\sim}$  получает приращение  $(u')^2 \cdot \Delta(v_{\sim}^2)$ . Если в этот момент  $u' = 0$ , то  $u_{\max}$  не изменяется. Если  $(u')^2 = (u')_{\max}^2$  ( $u = 0$ ), то  $u_{\max}$  изменяется пропорционально  $v_{\sim}$ . Таким образом, в зависимости от фазы радиальных колебаний на стыке периодов, относительное изменение размаха радиальных колебаний на стыке составляет

$$\eta_m = \left( \frac{v_{\sim n}}{v_{\sim n-1}} \right)^{\chi}, \quad 0 \leq \chi \leq 1. \quad (12)$$

При несимметричных матрицах  $\eta_m$  выражается сложнее. Однако если асимметрия матриц невелика, то величина  $\eta_m$  находится приблизительно в тех же самых пределах.

Возвращаясь к первоначальным координатам (1) и учитывая выражения (6), получаем:

$$X_{\max} = V \sqrt{\frac{L/mv}{(L/mv)_0}} V \sqrt{\frac{v_{cp}}{v_{0cp}}} \prod_{i=1}^n \eta_i \times \\ \times \sqrt{X_0^2 + \left( \sqrt{L} \frac{dX}{dZ} \right)_0^2}, \\ Y_{\max} = \gamma_n V \sqrt{\frac{L/mv}{(L/mv)_0}} V \sqrt{\frac{v_{cp}}{v_{0cp}}} \prod_{i=1}^n \bar{\eta}_i \times \\ \times \sqrt{Y_0^2 + \left( \sqrt{L} \frac{dY}{dZ} \right)_0^2}.$$

В том случае, когда  $\eta_n$  при всех  $n$  принимает максимальные из возможных значений, имеет место предельно выраженный параметрический резонанс, и размах колебаний возрастает, при не слишком большой асимметрии матриц, примерно в  $\frac{v_{\sim \max}}{v_{\sim \min}}$  раз за один цикл изменения  $a_{ij}$ .

В процессе фазовых колебаний  $\frac{v_{\sim \max}}{v_{\sim \min}}$  может достигать 1,2 (при  $\Lambda = 1,6$ ). Избегать резонанса между фазовыми и радиальными колебаниями практически невозможно, так как соответствующие условиям резонанса кривые, выражаемые для малых фазовых колебаний уравнением

$$\frac{T_{\text{фаз}}}{T_{\text{рад}}} = \frac{\mu}{\sqrt{8A \sin \varphi}} = \frac{m}{2},$$

( $m$  — целое число), густо расположены в используемой для работы (средней) части области устойчивости. Однако благодаря малости общего числа фазовых колебаний (порядка 10 в ускорителях на многие сотни миллионов электрон-вольт), затуханию их по мере ускорения частиц и отсутствию предельно выраженных резонансов возрастание размаха радиальных колебаний под влиянием фазовых колебаний не превышает нескольких десятков процентов (и происходит главным образом при небольших энергиях частиц).

Равенство (12) позволяет также вычислить вероятные изменения размаха колебаний на стыках частот ускорителя, имеющих различные параметры.

Поступила в редакцию 8 III 1956 г.

## ЛИТЕРАТУРА

1. E. D. Courant, M. S. Livingston, H. S. Snyder, Phys. Rev. 88, 1190—1196 (1952). Имеется перевод—Проблемы современной физики, вып. 11, 169—179 (1954).
2. J. P. Blewett, Phys. Rev. 88, 1197—1199 (1952).
3. L. C. Teng, Rev. Sci. Instr. 25, 264—268 (1954).
4. L. Smith, R. L. Gluckstern, Rev. Sci. Instr. 26, 220—228 (1955). Имеется перевод—Проблемы современной физики, вып. 4, 138—154 (1956).
5. J. S. Bell, AERE T/R 1072, Harwell (1952).
6. А. Д. Власов, Н. И. Котова, Отчет № 182 РАЯН СССР (1954).
7. А. Д. Власов, Отчеты № 197, 210 РАЯН СССР (1955).
8. Э. Л. Бурштейн, Л. С. Соловьев, Доклады АН СССР, 109, № 4, 721—724 (1956).