

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ПРОВОДНИКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ*)

В. Д. Шафранов

В рамках гидродинамики получены критерии устойчивости идеального цилиндрического газового проводника во внешнем магнитном поле.

В [1] исследована устойчивость цилиндра из полностью ионизированной плазмы, давление которой уравнивается магнитными силами текущего вдоль цилиндра тока. Рассматривались возмущения, при которых ось цилиндра искривляется в винтовую линию. Относительно этих возмущений равновесие оказывается неустойчивым. В настоящей работе, как и в [1], методом малых колебаний и в предположении идеальной проводимости исследуется устойчивость относительно произвольных возмущений при наличии компоненты магнитного поля, направленной вдоль цилиндра («продольное поле»). Выведены критерии устойчивости.

Исходная система уравнений состоит из уравнений магнитной гидродинамики для идеально проводящей среды

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{vH}], \\ \rho &= \text{const } \rho^0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{jH}]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При равновесии $v=0$; $\frac{\partial}{\partial t}=0$, цилиндр однороден по оси и азимуту $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. Отличны от нуля компоненты поля H_z^0 и H_φ^0 . Будем

считать, что внутри цилиндра $H_\varphi^0 = 0$, а H_z^0 всюду однородно

$$\left. \begin{aligned} H_{\varphi i}^0 &= 0; \quad H_{\varphi e}^0(r) = \frac{2I}{cr}; \\ H_{zi}^0 &= \text{const}; \quad H_{ze}^0 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(Индексы i, e относятся соответственно к внутреннему и внешнему полю.) В этом случае плотность и давление постоянны по сечению, причем

$$\begin{aligned} 8\pi p^0 &= H_{\varphi e}^{02}(a) + H_{ze}^{02} - H_{zi}^{02} = \\ &= H_{\varphi e}^{02}(a) (1 + h_e^2 - h_i^2), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$h_i = \frac{H_{zi}^0}{2I/ca}; \quad h_e = \frac{H_{ze}^0}{2I/ca}.$$

Возмущения удобно рассматривать в лагранжевых координатах. Пусть частицы газа получили смещение $\xi(r) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)}$. В линейном относительно возмущений приближении поправки ко всем величинам пропорциональны смещению: $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}^{(1)}(r) e^{i(kz + m\varphi + \omega t)}$ и т. п. Из (1) получаем для этих поправок уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \rho^{(1)} &= -\rho^0 \operatorname{div} \xi, \quad \mathbf{H}_i^{(1)} = \operatorname{rot} [\xi \mathbf{H}_i^0], \\ p^{(1)} &= -\gamma p^0 \operatorname{div} \xi, \\ \omega^2 \xi + c^2 \nabla \operatorname{div} \xi + \frac{c_H^2}{H_i^{02}} [\operatorname{rot} \mathbf{H}_i^{(1)} \cdot \mathbf{H}_i^0] &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$c^2 = \frac{\gamma p^0}{\rho^0}; \quad c_H^2 = \frac{H_i^{02}}{4\pi \rho^0}. \quad (5)$$

*) Доложено на семинаре Лаборатории электродинамики Королевского технического училища в Стокгольме 2 сентября 1956 г.

Уравнение для ξ имеет следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} \xi_z &= C I_m(ar); & \xi_\varphi &= C \frac{m}{kr} \frac{k^2 c^2 - \omega^2}{a^2 c^2} I_m(ar), \\ \xi_r &= iC \frac{k^2 c^2 - \omega^2}{k a c^2} \left[\frac{m}{ar} I_m(ar) - I_{m-1}(ar) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$a^2 = \frac{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_m^2}\right)}{k^2 - \omega^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c_m^2}\right)}. \quad (7)$$

За масштаб длин всюду принимается радиус цилиндра a .

Поправки к полю вне цилиндра определяются из уравнений $\mathbf{H} = \nabla \psi$, $\Delta \psi = 0$. Полагая $\psi = \psi^0 + \psi^{(1)} e^{i(kz + m\varphi + \omega t)}$, получим для $\psi^{(1)}$ уравнение Бесселя m -го порядка от мнимого аргумента, решение которого, ограниченное при $r \rightarrow \infty$, есть $\psi^{(1)}(r) = \text{const} \cdot K_m(kr)$. Константа интегрирования определяется из условия непрерывности нормальной компоненты поля на поверхности цилиндра. Благодаря идеальной проводимости магнитные силовые линии увлекаются веществом, оставаясь параллельными поверхности. Поэтому нормальная компонента поля равна нулю и внешнее поле не зависит от внутреннего. Выпишем его значение на поверхности возмущенного цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} H_{rz}^{(1)} &= i \xi_r(a) (m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0), \\ H_{\varphi e}^{(1)} &= \frac{\xi_r(a) m (m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0)}{\left[k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m\right]}, \\ H_{ze}^{(1)} &= \frac{\xi_r(a) k (m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0)}{\left[k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m\right]}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Полученное решение для поправок справедливо при вполне определенном собственном значении ω^2 , знак которого показывает, является ли равновесие устойчивым ($\omega^2 > 0$) относительно заданного возмущения или неустойчивым ($\omega^2 < 0$). Это собственное значение находится из граничного условия, которое выводится из уравнения движения. В нашей постановке задачи оно сводится к требованию, чтобы на поверхности цилиндра выполнялось условие

$$8\pi p = H_{\varphi e}^2 + H_{ze}^2 - H_{zi}^2. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$H_\varphi^2(a + \xi_r) = H_\varphi^0(a) + 2H_\varphi^0(a) H_\varphi^{(1)}(a) + \frac{\partial H_\varphi^0}{\partial r} \xi_r(a)$$

и т. д., получим с учетом (3), (4) при $r=a=1$:

$$-\gamma p^0 \text{div} \xi = -\frac{\xi_r}{4\pi} \left\{ H_{\varphi e}^{02} - \frac{(m H_{\varphi e}^0 + k H_{ze}^0)^2}{k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m} \right\} + (\text{div} \xi - i k \xi_z) \frac{H_{zi}^0}{4\pi}. \quad (10)$$

Подставляя сюда значения ξ (6), напомним это условие в виде

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} (1 + h_e^2 - h_i^2) \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2 c^2} = \\ = \left(\frac{I_{m-1}(a)}{a I_m(a)} - \frac{m}{a^2} \right) \left(1 - \frac{(m + k h_e)^2}{k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m} \right) - h_i^2 \equiv \\ \equiv f(\omega^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Это уравнение, кроме положительного спектра решений $\omega^2 > 0$, соответствующего звуковым и альфвеновским волнам газа в возмущенном цилиндре, имеет одну ветвь собственных значений $\omega_m^2(k)$, имеющих в некоторой области отрицательный знак. Если продольное поле нуль, то при $m=0$ и $m=1$ эта ветвь целиком лежит в отрицательной области, причем для $k \ll 1$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &= -\frac{k^2 c^2}{\gamma - 1} \quad (\gamma \neq 1); \\ \omega_0^2 &= -2 \sqrt{2} k^2 c^2 \quad (\gamma = 1); \\ \omega_1^2 &= -\frac{2}{\gamma} k^2 c^2 \ln \frac{1}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для $m \geq 2$ эта ветвь в области малых k положительна, при значении $k = k_m$, определенном уравнением $k K_{m-1}/K_m - m^2 + m = 0$, она переходит в отрицательную область. Эти значения k_m таковы: $k_2 = 3$, $k_3 = 8$, $k_4 = 15, \dots$, $k_m = m^2$ ($m \gg 1$). В области коротковолновых возмущений ветвь $\omega_m^2(k)$ при любом значении m стремится к одному асимптотическому значению

$$\omega_m^2(k) = -\frac{2}{\gamma} \frac{k c^2}{a} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (13)$$

При наличии продольного поля эта ветвь при больших k переходит в положительную область. Критерий устойчивости получим из требования, чтобы дисперсионное уравнение (11) не имело решений $\omega^2 < 0$. При отрицательных ω^2 левая часть этого уравнения монотонно растет от $\omega^2 = 0$ до $\omega^2 = -\infty$, а правая часть монотонно убывает. Следовательно,

решение $\omega^2 < 0$ отсутствует, если $f(0) < 0$ или $\left. \begin{array}{l} \text{Предельные случаи} \end{array} \right\}$

$$\frac{k^2 h_i^2}{k \frac{I_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m} + \frac{(k h_e + m)^2}{k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m} > 1. \quad (14)$$

Входящие сюда комбинации

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(k, m) = k \frac{I_{m-1}(k)}{I_m(k)} - m; \\ \varphi_2(k, m) = k \frac{K_{m-1}(k)}{K_m(k)} + m \end{array} \right\} \quad (15)$$

не зависят от знака m , тогда как коэффициент $(k h_e + m)^2$ при заданной форме возмущения существенно зависит от знака $m/k h_e$. При получении критерия устойчивости необходимо учитывать оба знака. Ниже для определенности считаем $k > 0$ и $m > 0$.

Отметим специально некоторые случаи:

1) $H_{\varphi}^0 = 0$. Равновесие всегда устойчиво, так как (14) переходит в

$$\varphi_2 H_{zi}^{02} + \varphi_1 H_{ze}^{02} > 0 \quad (\varphi_1 > 0, \varphi_2 > 0);$$

2) $H_{ze}^0 = h_e = 0$. Критерий устойчивости при $m=0$ $h_i^2 > \frac{I_1^0(k)}{k I_0(k)}$. Для $m \geq 2$ требуется меньшее значение h_i . Максимальное значение правой части последнего неравенства равно 0,5. Таким образом, при $H_{zi}^0 > \frac{\sqrt{2}I}{ca}$

равновесие устойчиво относительно возмущений с $m \neq 1$. При $m=1$ необходимое для устойчивости продольное поле растет с $k \rightarrow 0$ логарифмически. Поскольку $h_i < 1$ (3), область устойчивости всегда лежит при $k > 0,46$;

3) $h_i = H_{zi}^0 = 0$. Условие устойчивости $|h_e| > \frac{1}{k} (\sqrt{k K_{m-1}/K_m + m} \mp m)$, знак минус

соответствует положительным, а знак плюс — отрицательным значениям $m/k h_e$. Так как $|h_e|$ растет с увеличением m , то одно внешнее продольное поле не обеспечивает устойчивости. Возмущения с длиной волны $\lambda \simeq 2\pi a \frac{|h_e|}{m}$ не стабилизируются полем.

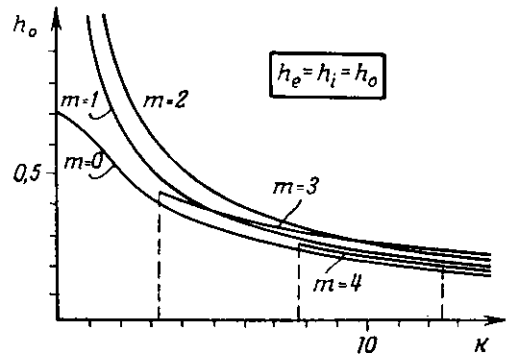
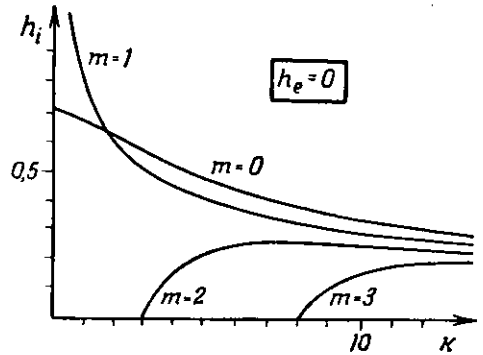
В общем случае при $h_e \neq 0$ и $h_i \neq 0$ получим критерий устойчивости $|h_i| > h_0$, где

$$\left. \begin{array}{l} h_0 = \frac{\varepsilon m \varphi_1 + \sqrt{(\varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_1 - m^2) \varphi_1 \varphi_2}}{k (\varphi_2 + \varepsilon^2 \varphi_1)} \\ \varepsilon = |h_e| \end{array} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{array}{l} h_0 = \frac{\varepsilon m + \sqrt{(1 + \varepsilon^2) m - m^2}}{k (1 + \varepsilon^2)} \\ (k \ll 1, m \neq 0), \\ h_0 = \frac{\varepsilon m + \sqrt{(1 + \varepsilon^2) k - m^2}}{k (1 + \varepsilon^2)} \\ (k \gg 1). \end{array} \right\} \quad (17)$$

Область устойчивости длинноволновых возмущений $k < k_m$ для $m > 2$ сужается при $1 + \varepsilon \geq m$ до нуля.

На графиках область неустойчивости лежит между осью абсцисс и кривыми $h(k)$.



Границы области устойчивости при разных значениях m .

$$h_i = \frac{H_{zi}^0}{2I/ca}; \quad h_0 = \frac{H_{ze}^0}{2I/ca}; \quad k = \frac{2\pi a}{\lambda}.$$

Заметим, что условие устойчивости (14) сводится к требованию, чтобы появляющаяся из-за смещения цилиндра добавочная сила F , действующая со стороны магнитного поля, была направлена против смещения. Действи-

тельно, как следует из выводов (10), (11), эта сила, отнесенная к единице поверхности,

$$F = \xi_r \frac{H_{\varphi e}^2(a)}{4\pi a} \frac{f(0)}{\varphi_1(k)}.$$

Если газовый цилиндр находится внутри коаксиального проводящего цилиндра радиуса b , то в условии (16) нужно заменить

$$\varphi_2(k) \text{ на } \frac{[\varphi_2(k) - \chi(kb)\varphi_1(k)I_m(k)/K_m(k)]}{[1 + \chi(kb)I_m(k)/K_m(k)]},$$

где

$$\chi(kb) = \frac{[kbK_{m-1}(kb) + mK_m(kb)]}{[kbI_{m-1}(kb) - mI_m(kb)]}.$$

Ограничимся рассмотрением влияния коаксиального цилиндра на длинноволновые возмущения $kb \ll 1$ при $h_e \neq 0$, $h_i = 0$. При $k=0$ сила, действующая на цилиндр со сто-

роны магнитного поля, равна:

$$F = -\frac{I^2 \xi_r}{\pi a^3 c^2} \frac{b^{2m}(m-1) + m + 1}{b^{2m} - m} \quad (m \neq 0);$$

$$F = \frac{I^2 \xi_r}{\pi a^3 c^2} \left(1 - \frac{2h_e^2}{b^2 - 1}\right) \quad (m = 0).$$

Условие устойчивости $F/\xi_r < 0$. Как видно, магнитное поле между цилиндрами демпфирует возмущения с $m = 0, 1$.

В заключение приношу благодарность академику М. А. Леонтовичу и С. И. Брагинскому за ценные указания.

Поступила в редакцию 19 X 1956 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. K r u s k a l, M. S c h w a r z s c h i l d, Proc. Roy. Soc. A233, 348 (1954).