

СТАТЬИ

УДК 621.039.51

РАСЧЕТ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ В МНОГОГРУППОВОЙ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ ПОДКРИТИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Черезов А.Л., Шукин Н.В., Семенов А.А., Мехрюшев А.А. (НИЯУ МИФИ, г. Москва)

Неопределенность ядерных данных, технологических параметров активной зоны, неточности используемых модельных приближений приводят к значительной погрешности нейтронно-физических расчетов. Поэтому в целях повышения надежности и эффективности управления и проектирования реакторных установок необходимо проводить верификацию и настройку реакторных моделей с использованием результатов измерений. Корректное сопоставление измерений и расчетов возможно лишь при учете их погрешности. Задача количественной оценки неопределенности вычислений при заданной неопределенности параметров модели решается методами теории чувствительности и анализа неопределенности [1—3].

В настоящее время в достаточной степени разработаны методы оценки неопределенности линейных и нелинейных функционалов нейтронного поля [4, 5]. В меньшей степени уделяется внимание оценке неопределенности распределенных характеристик: нейтронного, температурного полей, распределения ядерной концентрации, полей энерговыделения и др. Вероятностные характеристики распределенных параметров применяются в алгоритмах восстановления, настройки и оптимальной фильтрации расчетных моделей [6—9]. Особое значение для этих алгоритмов имеют вторые моменты функции состояния модели — ковариационные матрицы, исследованию которых посвящена настоящая работа.

Целью работы является изучение структуры и поиск эффективных алгоритмов расчета ковариационных матриц нейтронного поля в рамках многогруппового диффузионного приближения. Анализ проводится для стационарного подкритического реактора с распределенным внутренним источником нейтронов.

Детерминированная модель нейтронного поля. Рассмотрим модель нейтронного поля в подкритическом реакторе, имеющем объем V , с распределенным положительным внутренним источником нейтронов $\mathbf{f} = [f_1(\mathbf{r}), \dots, f_K(\mathbf{r})]^T$ в K -групповом диффузионном приближении. Вектор $\Phi = [\varphi_1(\mathbf{r}), \dots, \varphi_K(\mathbf{r})]^T$ группового нейтронного поля отвечает системе дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A} \Phi + \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

с матричным оператором $\mathbf{A}$, состоящим из трех слагаемых:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{F}. \quad (2)$$

Слагаемое $\mathbf{M}$ представляет собой (K, K) -матрицу, отвечающую за процессы поглощения и утечки нейтронов. Элементы M_{ij} этой матрицы определяются следующим образом:

$$M_{kj} \varphi_j(\mathbf{r}) = -\nabla [D^k(\mathbf{r}) \nabla \varphi_k(\mathbf{r})] + \Sigma_{ad}^k(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}).$$

Слагаемые $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$ — это (K, K) -матрицы, отвечающие за межгрупповое перераспределение нейтронов и их воспроизводство за счет деления. Элементы этих матриц имеют вид

$$K_{ij} \varphi_j(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^K \Sigma_d^{i,j}(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r});$$

$$F_{ij} \varphi_j(\mathbf{r}) = \chi^i \sum_{j=1}^K \nu \Sigma_f^j(\mathbf{r}) \varphi_j(\mathbf{r}).$$

Параметрами рассматриваемой модели являются Σ_a^i — макроскопическое сечение поглощения; $\Sigma_d^{i,j}$ — макроскопическое сечение перевода нейтронов из группы i в группу j ; $\bar{\nu} \Sigma_f^j$ — размножающая способность; $D^i = 1/(3\Sigma_{tr}^i)$ — коэффициент диффузии; Σ_{tr}^i — транспортное макроскопическое сечение;

$\Sigma_{ad}^i = \Sigma_a^i + \sum_{j=1}^K \Sigma_d^{i,j}$ — макроскопическое сечение

увода нейтронов из группы i ; χ^i — групповой спектр нейтронов деления; K — число энергетических групп. Решение ищется в гильбертовом пространстве $H_K(V)$ векторных функций $\mathbf{u} = [u_1(\mathbf{r}), \dots, u_K(\mathbf{r})]^T$ со скалярным произведением $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \sum_{k=1}^K \int_V u_k(\mathbf{r}) v_k(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ и нормой $\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{\{\mathbf{u}, \mathbf{u}\}}$. Компоненты векторов Φ и $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}) = -D_i(\mathbf{r}) \nabla \phi_i(\mathbf{r})$, $i = 1, \dots, K$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют граничным условиям

$$\phi_i(\mathbf{r}_0) + \mu_i D_i(\mathbf{r}_0) \nabla \phi_i(\mathbf{r}_0) = 0, \quad i = 1, \dots, K,$$

где $\mathbf{r}_0 \in \Gamma$, Γ — внешняя граница реактора V ; μ_i — параметры граничных условий. В силу самосопряженности оператора диффузии сопряженный оператор $\mathbf{A}^+$ совпадает с транспонированной матрицей $\mathbf{A}^T$.

Свойства операторов $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{F}$ подробно изучены в работах [10, 11]. Отметим лишь некоторые их особенности, важные для дальнейшего изложения.

1. Спектр прямого $\mathbf{A}$ и сопряженного ему $\mathbf{A}^+$ операторов состоит из счетного числа собственных значений ξ_i : $\text{Re } \xi_0 > \text{Re } \xi_1 \geq \dots$, где Re — действительная часть, которым соответствуют собственные элементы Φ_i и Φ_i^+ , $i = 0, 1, \dots$. Наибольшее собственное значение ξ_0 действительно, и ему отвечает неотрицательный собственный элемент Φ_0 . При возрастании индекса i собственные значения устремляются в глубь отрицательной полуплоскости, т.е. выполняется $\text{Re } \xi_i \rightarrow -\infty$ при $i \rightarrow \infty$.

2. Положительное решение неоднородного уравнения (1) существует при условии $\xi_0 < 0$. Если $\xi_0 = 0$, то согласно альтернативе Фредгольма $\{\Phi_0, \mathbf{f}\} = 0 \rightarrow \mathbf{f} = 0$.

3. Условно-критический оператор второго рода [12] $\mathbf{B} = (\mathbf{M} - \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}$ является компактным оператором и удовлетворяет условиям теории Рисса—Шаудера. Обозначим собственные значения и собственные элементы оператора $\mathbf{B}$ соответственно k_i и Ψ_i . Тогда наибольшее собственное значение k_0 является ведущим и имеет смысл эффективного коэффициента размноже-

ния (второго рода). Ведущее собственное значение выражается через собственное значение ξ_0 : $\rho = 1 - 1/k_0 = C_0 \xi_0$, где коэффициент $C_0 = \{\mathbf{K} \Phi_0, \Psi_0^+\} / \{\Phi_0, \Psi_0^+\}$, $\Psi_i^+(\mathbf{r})$ — собственные элементы сопряженного оператора $\mathbf{B}^+$. Число $\rho = 1 - 1/k_0$ назовем реактивностью. Из этих соотношений следует, что при уменьшении реактивности реактора $\rho < 0$ спектр оператора $\mathbf{A}$ сдвигается влево, при достижении критического состояния $\rho = 0$ наибольшее собственное значение ξ_0 становится равно нулю.

Вероятностная модель нейтронного поля.

Будем рассматривать уравнение (1) как стохастическую систему уравнений со случайными параметрами $\Sigma = [\Sigma_a^i, \Sigma_d^{i,j}, \sqrt{\Sigma_f^j}, i, j = 1, \dots, K]$ и

$\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_K]^T$, вторые моменты которых ограничены. Запишем систему (1) в форме возмущений

$$(\mathbf{A}_0 + \delta \mathbf{A})(\Phi_0 + \delta \Phi) + (\mathbf{f}_0 + \delta \mathbf{f}) = 0. \quad (3)$$

Детерминированная матрица $\mathbf{A}_0$ совпадает с матрицей (2), параметры которой отвечают средним значениям Σ и $\mathbf{f}$. Матрица $\delta \mathbf{A}$ состоит из элементов $\delta \Sigma$: $E(\delta \Sigma) = 0$, $E(\delta \Sigma)^2 < \infty$, где $\Sigma \in \Sigma$. Внутренний источник нейтронов $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \delta \mathbf{f}$, причем $E(\delta \mathbf{f}) = 0$, $E(\delta \mathbf{f})^2 < \infty$.

Решением системы (3) является случайный вектор $\Phi = \Phi_0 + \delta \Phi$, $E(\delta \Phi) = 0$. Вычислим первые два момента этого вектора — среднее значение Φ_0 и ковариационную матрицу $\mathbf{C}_\Phi$. Для этого раскроем скобки и подействуем оператором усреднения E на левую часть системы (3). В результате получим уравнение для среднего значения Φ_0 :

$$\mathbf{A}_0 \Phi_0 + \mathbf{f}_0 + E[\delta \mathbf{A} \delta \Phi] = 0. \quad (4)$$

Отметим, что это уравнение отличается от исходного (1) наличием дополнительного слагаемого $E[\delta \mathbf{A} \delta \Phi]$ — среднего случайного вектора $\delta \mathbf{A} \delta \Phi$, для которого введем обозначение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \delta \mathbf{y}$, где $E[\delta \mathbf{y}] = 0$. Предполагая, что $\mathbf{A}_0^{-1}$ существует, можно записать выражения для $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}_0$ в явном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= -\delta \mathbf{A} \mathbf{A}_0^{-1} (\delta \mathbf{A} \Phi_0 + \delta \mathbf{y} + \delta \mathbf{f}); \\ \mathbf{y}_0 &= -E(\delta \mathbf{A} \mathbf{A}_0^{-1} \delta \mathbf{A}) \Phi_0 - E(\delta \mathbf{A} \mathbf{A}_0^{-1} \delta \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Подставляя y_0 в формулу (4), получим уравнение относительно среднего вектора Φ_0

$$(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0)\Phi_0 + \mathbf{f} - E(\delta\mathbf{A}\mathbf{A}_0^{-1}\delta\mathbf{y}) = 0, \quad (5)$$

в котором оператор $\mathbf{B}_0 = E(\delta\mathbf{A}\mathbf{A}_0^{-1}\delta\mathbf{A})$.

Выполнив очевидные преобразования над уравнениями (4), (5), получим уравнение для нахождения ковариационной матрицы $\mathbf{C}_\Phi$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0\mathbf{C}_\Phi\mathbf{A}_0^T &= E(\delta\mathbf{A}\Phi_0\Phi_0^T\delta\mathbf{A}^T) + \mathbf{C}_f + \\ &+ \mathbf{C}_y - E(\delta\mathbf{A}\mathbf{A}_0^{-1}\delta\mathbf{y}\delta\mathbf{f}^T) - \mathbf{A}_0^{-1}E(\delta\mathbf{A}\delta\mathbf{y}\Phi_0^T\delta\mathbf{A}^T). \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнении (6) $\mathbf{C}_f = E(\delta\mathbf{f}\delta\mathbf{f}^T)$; $\mathbf{C}_y = E(\delta\mathbf{y}\delta\mathbf{y}^T)$. Пренебрегая высшими по порядку величины слагаемыми $\mathbf{C}_y$, $E(\delta\mathbf{A}\mathbf{A}_0^{-1}\delta\mathbf{y}\delta\mathbf{f}^T)$; $\mathbf{A}_0^{-1}E(\delta\mathbf{A}\delta\mathbf{y}\Phi_0^T\delta\mathbf{A}^T)$, приходим к приближенным уравнениям для вектора Φ_0 и матрицы $\mathbf{C}_\Phi$, справедливым при малых возмущениях параметров модели:

$$(\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0)\Phi_0 + \mathbf{f} \approx 0; \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_0\mathbf{C}_\Phi\mathbf{A}_0^T \approx \Gamma. \quad (8)$$

Правая часть $\Gamma = \mathbf{C}_f + E(\delta\mathbf{A}\Phi_0\Phi_0^T\delta\mathbf{A}^T)$ уравнения (8) представляет собой сумму ковариационной матрицы $\mathbf{C}_f$ вектора внутреннего источника нейтронов и матрицы $E(\delta\mathbf{A}\Phi_0\Phi_0^T\delta\mathbf{A}^T)$, зависящей от вероятностных характеристик неопределенных параметров модели. Для решения уравнения (7) можно воспользоваться итерационной схемой, предложенной и проанализированной в работе [13].

Решение уравнения для ковариационной матрицы. Настоящий раздел посвящен анализу матричного уравнения (8) и построению его решения $\mathbf{C}_\Phi$. Решение уравнения (8) будем искать в базисе собственных функций оператора $\mathbf{A}_0$. Из спектральных свойств оператора $\mathbf{A}_0$ следует справедливость разложения

$$\mathbf{A}_0 = \xi_0\mathbf{P}_0 + \mathbf{U}. \quad (9)$$

Оператор $\mathbf{P}_0 = \{\mathbf{p}_{kl}\}_{k,l=1}^K$, $\mathbf{p}_{kl} = \langle \Phi_{0,k}^+(\mathbf{r}), \cdot \rangle \Phi_{0,l}(\mathbf{r})$, где l, k — номера энергетических групп, является ортогональным проектором на инвариантное подпространство $M_0 = \text{sp}[\Phi_0(\mathbf{r})]$ наибольшего

собственного значения ξ_0 . Здесь sp обозначает линейную оболочку. В случае невырожденности собственных значений ξ_i оператор $\mathbf{U}$ может быть представлен в виде ряда $\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \mathbf{P}_i$, где

$\mathbf{P}_i = \{\mathbf{p}_{kl}\}_{k,l=1}^K$; $\mathbf{p}_{kl} = \langle \Phi_{i,k}^+(\mathbf{r}), \cdot \rangle \Phi_{i,l}(\mathbf{r})$. Подставив разложение (9) в уравнение (8) и применив свойство ортогональности проекторов $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \delta_{ij}\mathbf{I}$, получим выражение для матрицы $\mathbf{C}_\Phi$:

$$\mathbf{C}_\Phi = \frac{\alpha_{00}}{\xi_0^2} \Phi_0\Phi_0^T + \frac{1}{\xi_0} (\mathbf{P}_0\mathbf{G}\mathbf{U}^+ + \mathbf{U}\mathbf{G}\mathbf{P}_0^+) + \mathbf{U}\mathbf{G}\mathbf{U}^+,$$

где коэффициенты $\alpha_{00} = \{\Phi_0(\mathbf{r}), \Gamma\Phi_0^+(\mathbf{r}')\}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$. Если каждое из собственных значений оператора $\mathbf{A}$ имеет равную единице алгебраическую кратность, можно прийти к простой форме разложения ковариационной матрицы

$$\mathbf{C}_\Phi = \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{\alpha_{ij}}{\xi_i\xi_j} \Phi_i\Phi_j^T. \quad (10)$$

Коэффициенты $\alpha_{ij} = \{\Phi_i^T(\mathbf{r}), \Gamma\Phi_j^+(\mathbf{r}')\}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$ или в развернутой форме записи

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= E\left\{\left\{\Phi_i^+(\mathbf{r}), \delta\mathbf{A}\Phi_0\right\}, \left\{\Phi_0, \delta\mathbf{A}^T\Phi_j^+(\mathbf{r}')\right\}\right\} + \\ &+ \left\{\Phi_i^+(\mathbf{r}), \mathbf{C}_f\Phi_j^+(\mathbf{r}')\right\}_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}. \end{aligned} \quad (11)$$

Разложение ковариационной матрицы $\mathbf{C}_\Phi$ в ряд (10) позволяет построить приближенное решение системы стохастических уравнений (3). Чтобы это продемонстрировать, введем линейный оператор $\mathbf{K}: H_K(V) \rightarrow H_K(V)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{u} &= \int_V \mathbf{C}_\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{u}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \beta_{ij} \left\{\Phi_j(\mathbf{r}'), \mathbf{u}(\mathbf{r}')\right\}_{\mathbf{r}'} \Phi_i(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Пусть $\{\lambda_k, \mathbf{v}_k, k=0, 1, \dots\}$ — собственные значения и векторы бесконечной матрицы $\Lambda = \{\alpha_{ij}\{\Phi_i, \Phi_j\}/(\xi_i\xi_j), i, j=1, \dots, \infty\}$ [14]. Тогда, пользуясь условием полноты собственных функций оператора $\mathbf{A}^+$, нетрудно установить, что спектр $\sigma(\mathbf{K})$ совпадает со спектром матрицы Λ , при этом собственные элементы $\Psi_k(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{\infty} v_k^i \Phi_i^+$, где $\mathbf{v}_k = \{v_k^i, i=0, 1, \dots\}$.

Из теоремы Карунэна—Лозва [15, 16] следует, что центрированный случайный процесс $\delta\Phi(\mathbf{r})$, заданный на области V , можно представить в виде ряда $\delta\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \psi_k(\mathbf{r})$, где b_k — это центрированные некоррелированные случайные числа с дисперсией, равной $\lambda_k \in \sigma(\mathbf{C}_\Phi)$, $\psi_k(\mathbf{r})$ — собственные элементы оператора $\mathbf{K}$, которые в работе [13] носят названия координатных функций. Из теоремы следует, что решение $\Phi(\mathbf{r})$ системы уравнений (3) можно представить в виде

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \psi_k(\mathbf{r}), \quad \forall b_i : E(b_i, b_j) = \lambda_i \delta_{ij}.$$

Модель погрешности нейтронно-физических параметров. Ряд (10) и соотношения (11) для коэффициентов этого ряда позволяют качественно проанализировать поведение вероятностного распределения нейтронного поля в зависимости от уровня подкритичности реактора и при различных моделях корреляции случайных параметров. Исследуем простейший случай, когда корреляция параметров $\Sigma, \mathbf{f}$ возникает за счет действия системы регулирования, обеспечивающей постоянство некоторого заданного функционала нейтронного поля. Рассмотрим три различных случая.

1. Изменение нейтронного поля, вызванное возмущениями макроскопических сечений $\delta\Sigma$ и внутренним источником нейтронов $\delta\mathbf{f}$, не компенсируется. В этом случае макросечения являются полностью некоррелированными.

2. Неизменным остается эффективный коэффициент размножения $k_{\text{эф}}$. Из требования равенства нулю первой вариационной производной функционала $\delta_1 k_{\text{эф}} = 0$ получим условие

$$\{\delta\mathbf{A}\Phi, \Phi_0^+\} = 0. \quad (12)$$

3. Неизменным остается некоторый линейный функционал нейтронного поля $F = \{\mathbf{g}, \Phi\} = \text{const}$. В этом случае из линейной теории возмущений вытекает требование

$$\{\delta\mathbf{g}, \Phi\} + \{\delta\mathbf{A}\Phi + \delta\mathbf{f}, \chi\} = 0, \quad (13)$$

где вектор χ находится из уравнения $\mathbf{A}^+ \chi = -\mathbf{g}$. Формула (13) гарантирует выполнение условия $\delta_1 F = 0$.

В качестве функционала F можно рассматривать либо полную тепловую мощность реактора $W = \{\Sigma_f, \Phi\}$, либо токи внутри- или внезонных нейтронных детекторов $I_k = \sum_{j=1}^K \Sigma_{\text{дет}}^j \varphi_j(\mathbf{r}_k^{\text{дет}})$, либо скорости реакций $R = \{\Sigma_r, \Phi\}$ и др. Подробный вывод соотношений (12), (13) представлен в работах [17, 18].

При $k_{\text{эф}} \rightarrow 0$ (или, что то же самое, $\rho \rightarrow -\infty$) спектр собственных значений ξ_i оператора $\mathbf{A}$ сдвигается влево, т.е. $1/\text{Re}(\xi_i) \rightarrow 0$. Отсюда следует, что вне зависимости от рассматриваемой модели корреляции параметров будет выполняться условие $\lim_{\rho \rightarrow -\infty} \|\mathbf{C}_\Phi\|_2 \rightarrow 0$. Поведение ковариационной матрицы в околоскритическом состоянии реактора при $k_{\text{эф}} \rightarrow 1$ (или $\rho \rightarrow -0$) будет во всех рассматриваемых случаях различным.

1. Если $k_{\text{эф}} \rightarrow 1$, то собственное значение $\xi_0 \rightarrow 0$, и в разложении (10) выделяется первый компонент $\mathbf{C}_\Phi \approx \alpha_{00}/\xi_0^2 \Phi_0^+ \Phi_0^T$ и $\|\mathbf{C}_\Phi\|_2 \rightarrow \infty$.

2. Из условия (12) и соотношений (11) следует, что при $k_{\text{эф}} \rightarrow 1$ коэффициенты $\alpha_{0,i} \rightarrow \{\Phi_0^T(\mathbf{r}), \mathbf{C}_f \Phi_i^+(\mathbf{r}')\}_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$, так как $\Phi_0 \rightarrow \Phi_0(\mathbf{r})$. Тогда, если $\mathbf{C}_f \neq 0$, $\|\mathbf{C}_\Phi\| \rightarrow \infty$ при $k_{\text{эф}} \rightarrow 1$, если $\mathbf{C}_f = 0$, то $\|\mathbf{C}_\Phi\|_2 < \infty$.

3. При $k_{\text{эф}} \rightarrow 1$ функции $\Phi_0 \rightarrow \Phi_0(\mathbf{r})$, $\chi \rightarrow \Phi_0^+(\mathbf{r})$. Из соотношений (11), (12) следует, что коэффициенты $\alpha_{i,0}/\xi_i \xi_0 \rightarrow C_i < \infty$, откуда $\|\mathbf{C}_\Phi\|_2 < \infty$. Отметим, что в односкоростном приближении коэффициенты $C_i = 0$, в общем случае многогруппового приближения это не так.

Необходимо сделать два замечания относительно рассматриваемой корреляционной модели параметров. Во-первых, уравнения $\delta_1 F = 0$, $\delta_1 k_{\text{эф}} = 0$ не гарантируют строгого сохранения функционалов F и $k_{\text{эф}}$, и условия $F \sim \text{const}$, $k_{\text{эф}} \sim \text{const}$ выполняются лишь при достаточно малых возмущениях $\delta\Sigma$ и $\delta\mathbf{f}$. Это не противоречит выводам, поскольку изначально исследование ковариационной матрицы $\mathbf{C}_\Phi$ проводится в рамках линейного приближения.

Во-вторых, соотношения (12), (13) не учитывают конкретный способ, которым обеспечиваются условия их выполнения. Это могут быть соответствующее расположение поглощающих стержней, подбор подходящей концентрации жидкого поглотителя или др. Для получения более точных результатов данная информация должна учитываться при построении модели погрешности параметров Σ . Однако от этого качественное поведение C_Φ при варьировании уровня подкритичности не зависит.

Численные расчеты. Для пояснения полученных выкладок рассмотрим простейшую модель нейтронного поля. Запишем уравнение для плотности потока нейтронов $u(x)$ в одномерном диффузионном приближении для одномерной плоской размножающей подкритической зоны с распределенным источником нейтронов:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} u(x) + (b-a)u(x) + f(x) = 0; \\ u(0) = u(h) = 0. \end{cases}$$

Параметры $a, b > 0$ не зависят от координаты x , источник нейтронов $f(x) > 0$, толщина зоны $h > 0$. Для рассматриваемой модели решение $u(x)$ и ковариационная функция $C_u(x, x')$ в линейном приближении могут быть получены аналитически.

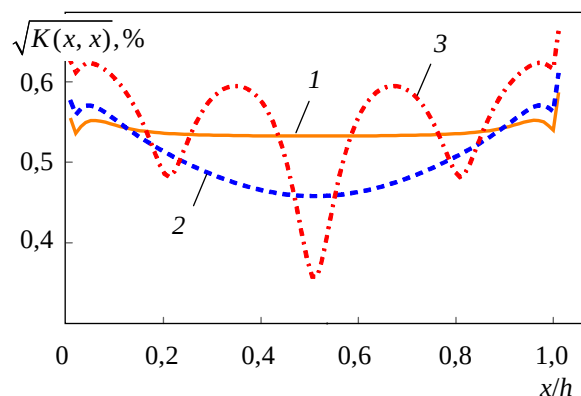
Спектр оператора $A = (d/dx)^2 + b - a$ с областью определения $D(A) = \{u(x) \in C^2[0, H], u(0) = u(h) = 0\}$ состоит из собственных значений

$$\sigma(A) = \left\{ \xi_n = b - a - \left(\frac{\pi}{h} n \right)^2, n = 1, 2, \dots \right\},$$

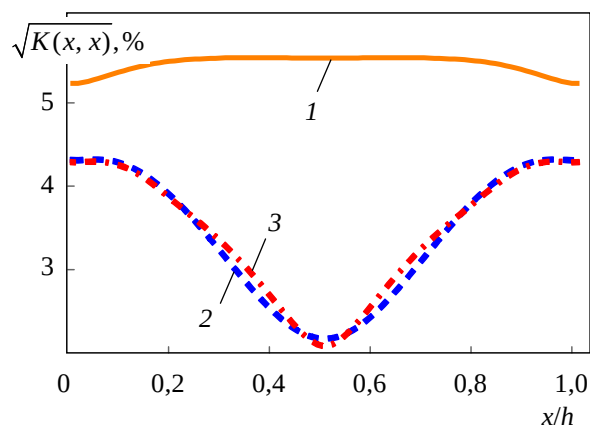
которым отвечают собственные функции $\psi_n(x) = \sqrt{2/h} \sin \pi n x / h$. Условие подкритичности означает отрицательность наибольшего собственного значения $\xi_0 < 0$, откуда следует требование $b - a - (\pi/h)^2 < 0$.

Рассмотрим физически большую размножающую систему с толщиной $h/L = 120$, где $L = \sqrt{a}$, и примем эффективную долю запаздывающих нейтронов $\beta_{\text{эф}} = 0,65\%$. Будем вносить

случайные некоррелированные по пространству и подчиняющиеся нормальному закону распределения возмущения в параметры a . Учтем действие системы регулирования, которая сохраняет заданный функционал посредством введения равномерной добавки к параметру a . Рассмотрим три случая: система регулирования отсутствует, система регулирования обеспечивает условие сохранения полной нейтронной мощности $N = \text{const}$ и с помощью системы регулирования достигается выполнение условия сохранения суммы $J_3 = I_1 + I_2 + I_3$ показаний I_i трех равномерно расставленных по зоне детекторов. На рис. 1, 2 показаны ковариационные матрицы и распределение среднеквадратических отклонений функции $u(x)$ для двух уровней подкри-



Р и с. 1. Распределение среднеквадратического отклонения плотности потока нейтронов при $\rho = -4,8 \beta_{\text{эф}}$, $\sigma_{\text{макс}} = 1,2\%$ для отключенной системы регулирования (1), системы регулирования, сохраняющей нейтронную мощность (2) и сумму показаний трех нейтронных детекторов (3)



Р и с. 2. Распределение среднеквадратического отклонения плотности потока нейтронов при $\rho = -0,4 \beta_{\text{эф}}$ для отключенной системы регулирования $\sigma_{\text{макс}} = 8,5\%$ (1), системы регулирования, сохраняющей нейтронную мощность $\sigma_{\text{макс}} = 4\%$ (2) и сумму показаний трех нейтронных детекторов $\sigma_{\text{макс}} = 4,2\%$ (3)

точности $\rho = -0,4 \beta_{\text{эф}}$, $\rho = -4,8 \beta_{\text{эф}}$. Все результаты получены из аналитических расчетов.

Расчеты свидетельствуют о существенной зависимости ковариационной функции нейтронного поля от корреляционной модели параметров размножающей среды. В частности, в отсутствие корреляций функция $K(x, y)$ положительна, ее диагональная часть $D(x) = K(x, x)$ хорошо аппроксимируется первой собственной функцией оператора A . Наличие корреляций приводит к подавлению первого слагаемого в разложении (10), в результате чего $K(x, y)$ становится знакопеременной, в распределениях дисперсии $D(x)$ нейтронного поля наблюдается выравнивание и возникновение «провала» в центре, характерного для физически больших размножающих сред [13]. Таким образом, результаты моделирования согласуются с теоретическими выводами.

Отметим, что похожие выкладки и расчеты, посвященные оценке среднеквадратичного отклонения энерговыделения в РБМК на примере двумерной модели, содержатся в работе [19].

Заключение. Для реализации корректного алгоритма восстановления полей и настройки параметров реакторной модели необходим расчет ковариационных функций нейтронного поля. С использованием теории малых возмущений и теоремы о спектральном разложении получены матричное уравнение для ковариации нейтронного поля (8) и решение этого уравнения в виде разложения (11). Полученное разложение можно использовать для расчета ковариационных матриц в качестве альтернативы статистическим подходам. Недостаток такого подхода заключается в том, что в некоторых случаях разложение (12) недостаточно быстро сходится, особенно в случае физически больших реакторов. Но если базис собственных векторов найден, рассчитать ковариационные матрицы нейтронного поля при различных корреляциях нейтронно-физических параметров не составляет труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cacuci D.** Global optimization and sensitivity analysis. — Nucl. Sci. Engng, 1990, v. 104, p. 78—88.

2. **Cacuci D.** Handbook of Nuclear Engineering. V. 1. Nuclear Engineering Fundamentals, 2010. 3642 p.
3. **Williams M.** Perturbation Theory for Reactor Analysis. CRC Handbook of Nuclear Reactor Calculations. Rogen: CRC Press, 1986, p. 63—188.
4. **Cacuci D.** Sensitivity theory for nonlinear systems. I. Nonlinear functional analysis approach. — J. Math. Phys., 1981, v. 22, № 12, p. 2794—2802.
5. **Cacuci D.** Sensitivity theory for nonlinear systems. II. Extensions to additional classes of responses. — Ibid., p. 2803—2812.
6. **Robert M., Robert E.** Kalman filter application for distributed parameter estimation in reactor systems. — Nucl. Sci. Engng, 1996, v. 123, № 3, p. 435—442.
7. **Tayebi L., Vashae D.** On the estimation of the unknown reactivity coefficients in a CANDU reactor. — Ann. Nucl. Energy, 2013, v. 53, p. 447—457.
8. **Poncot A., Argaud J.-P., Bouriquet B. e.a.** Variational assimilation for xenon dynamical forecasts in neutronic using advanced background error covariance matrix modelling. — Ibid., 2013, v. 60, p. 39—50.
9. **Семенов А.А., Дружаев А.А., Щукин Н.В.** Восстановление нейтронного поля с учетом пространственной корреляции погрешности значений сечений. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика ядерных реакторов, 2012, вып. 4, с. 18—26.
10. **Попыкин А.И.** Спектральные свойства многогрупповой диффузионной задачи: Препринт ИАЭ-2640, 1976.
11. **Макин Р.С.** О спектре многогруппового диффузионного приближения уравнения переноса нейтронов. — Дифференциальные уравнения, 1986, т. 22, № 9, с. 1623—1626.
12. **Шихов С.Б.** Вопросы математической теории реакторов. М.: Атомиздат, 1973.
13. **Загребав А.М., Насонова В.А., Овсянникова Н.В.** Математическое моделирование ядерного реактора при случайных возмущениях технологических параметров. М., НИЯУ МИФИ, 2011. 180 с.
14. **Кук Р.** Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Пер. с англ. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960.
15. **Loeve M.** Probability Theory. New York: Springer-Verlag, 1977. 413 p.
16. **Williams M.** Polynomial chaos functions and stochastic differential equations. — Ann. Nucl. Energy, 2006, v. 33, p. 774—785.
17. **Фейнберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б.** Теория ядерных реакторов. Т. 1. Элементарная теория реакторов. Учебник для вузов. М.: Атомиздат, 1978.
18. **Фейнберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б.** Теория ядерных реакторов. Т. 2. Газокинетическая теория. Учебник для вузов. М.: Атомиздат, 1983. 368 с.
19. **Крамаров А.Я., Шевелев Я.Б.** Инженерные расчеты ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1981.

Поступила в Редакцию 16.04.14